Б. Келдибаев

МАТЕМАТИКАЛЫК ИНДУКЦИЯ, ПРЕДЕЛ ЖАНА ТУУНДУ

$$A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Б. Келдибаев

МАТЕМАТИКАЛЫК ИНДУКЦИЯ, ПРЕДЕЛ ЖАНА ТУУНДУ

X-класстын математикасы боюнча кошумча окуу китеби

*Кыргыз Республикасынын билим, илим
жана маданият министрлиги бекиткен*

Бишкек - 2000

ББК 22.1 Я 721
К-34

Рецензенттер:

А.А. Бөрүбаев - физика-математика илимдеринин доктору, профессор, Кыргыз УИАсынын мүчө-корреспонденти;

А.А. Асанов - физика-математ. илимдеринин доктору, профессор;

Г. Дайырбекова - математика мугалими (Бишкек ш. №68-орто мектеби).

Келдибаев Б.

К-34 Математикалык индукция, предел жана туунду: Орто мектептин X-кл. математикасы б-ча кошумча окуу китеби. - Б.:КМУУ, 2000. - 80 б.

ISBN 9967-02-005-9

Бул кошумча окуу китеби типтүү программалык материалдарды тереңдетип окуган мектептердин окуучулары үчүн аталган түшүнүктөр боюнча негизинен теориялык алгачкы маалыматтарды алууга арналган. Ошондой эле алган теориялык билимин бышыктоо жана бекемдөө үчүн бир топ көнүгүүлөрдүн тизмеги да сунуш кылынат. Бул китептен студенттер жана мугалимдер да пайдалана алат.

К 4306020500-2000 ББК 22.1 Я 721

ISBN 9967-02-005-9

КИРИШ СӨЗ

Мектептеги математика курсунун азыркы программасында жана окуу китептеринде туунду түшүнүгүнүн берилиши анын эң негизги өзөгү же таянычы болгон пределдин окуп үйрөнүлүшүнөн таптакыр эле ажырап калган. Ошондой эле мурда программалык материал болуп жүргөн математикалык индукция методунун программадан чыгып калышы да бир кыйла өкүнүчтүү. Мындай кемчилдиктер, азыркы учурда, айрыкча математиканы тереңдетип окутуучу класстардын жана мектептердин окуучулары үчүн бир кыйла кыйынчылыктарды пайда кылып жатат.

Өзүңөргө белгилүү алгебра курсундагы кээ бир түшүнүктөр, маселен арифметикалык жана геометриялык прогрессияларды окуп үйрөнүүдө алардын жалпы мүчөсүнүн же алгачкы n мүчөсүнүн суммасынын формуласы айрым учурлардан келип чыккан жалпы тыянак катары каралат. Бирок, толук эмес индукциянын негизинде ар дайым эле айрым учурлардан туура жалпы жыйынтык чыга бербейт. Ошондуктан аталган формулалардын чын экендигин далилдөөнүн бир гана ишенимдүү жолу - математикалык индукция методун пайдалануу болуп эсептелет. Математикалык индукция методу мындан башка түшүнүктөрдү окуп үйрөнүүдө да кеңири колдонулат, мисалы сандардын бөлүнүүчүлүгү, теңдештиктерди далилдөөдө ж.у.с.

Албетте, туунду түшүнүгү жөнүндөгү алгачкы маалыматтарды математикалык сабаттуу так өздөштүрүүнү каалаган окуучулар үчүн эң негизги максат анын кандайча келип чыгышын предел түшүнүгүнө байланыштырып окуп үйрөнүү болуп саналат. Ошол эле учурда предел түшүнүгүн өздөштүрүү дегенибиз - бул сан удаалаштыгынын, функциянын предели жана аларга байланыштуу дагы башка түшүнүктөрдү белгилүү бир деңгээлде бекем жана мыкты окуп үйрөнүүнү билдирет.

Мына ушуларга байланыштуу бул окуу китебинде мектеп курсуна ылайыкташтырылган мазмундагы математикалык индукция принциби, сан удаалаштыгы жана анын предели, функциянын үзгүлтүксүздүгү жана предели, функциянын туундусунун аныктамасы жана туундуну эсептөө эрежелери жөнүндөгү маалыматтар камтылган. Тактап айтканда: дедукция жана индукция; толук жана толук эмес индукция; математикалык индукция принциби жана методу; сан удаалаштыктары, сан удаалаштыгынын предели жана пределдин жашашынын шарттары; эң сонун пределдер; функциянын үзгүлтүксүздүгү жана предели; функциянын туундусун анын предели аркылуу аныктоо; дифференцирлөө эрежелери жана тескери тригонометриялык функциялардын туундуларын эсептөө жөнүндөгү теориялык маалыматтар жетишээрлик деңгээлде баяндалат. Ошондой эле бул китепте функциянын үзгүлтүксүздүгү функциянын пределинен көз карандысыз мурда берилгендигин ([5]) жана тескери тригонометриялык функциялардын туундулары жөнүндө дагы баяндамалар бар экендигин белгилей кетели.

Ал эми аталган түшүнүктөрдү окуучулардын жакшы өздөштүрүүсүн бышыктоо жана бекемдөө максатында ар бир бөлүмгө карата жеткиликтүү сандагы көнүгүүлөр жана алардын айрымдарынын жооптору да сунуш кылынат.

Акырында, ушул китептин жарык көрүшүнө зор көмөк көрсөткөн иним Мураталиев Тилекке терең ыраазычылыгымды билдирем.

Бул китептин сапаты жөнүндөгү сунуш пикирлериңизди төмөнкү дарек боюнча билдирсеңиздер болот.

Бишкек шаары, Фрунзе көчөсү, үй № 547, 234-каб.

I. МАТЕМАТИКАЛЫК ИНДУКЦИЯ ПРИНЦИБИ.

1.1. Дедукция жана индукция.

Математикалык түшүнүктөрдү окуп үйрөнүүдө биз көбүнчө *ырастоолордун* (*айтылыштардын*) эки учуруна, б.а. *жалпы* жана *айрым (жекече) ырастоолорго* токтолобуз. Жалпы ырастоолорго мисал катары төмөндөгү сүйлөмдөрдү айтсак болот:

а) цифраларынын суммасы 3кө калдыксыз бөлүнгөн натуралдык сандын өзү дагы 3кө калдыксыз бөлүнөт;

б) $a + x = b$ $(a, b \in N)$ теңдемеси ар дайым жалгыз бир гана чыгарылышка ээ болот;

в) үч бурчтуктун орто сызыгынын узундугу, ага параллель жагынын узундугунун жарымына барабар ж. б.

Ал эми айрым ырастоолорго төмөндөгүлөр мисал боло алат:

а) 12054 саны 3кө калдыксыз бөлүнөт;

б) $7 - x = 15$ теңдемеси бир гана (-8) бүтүн чыгарылышына ээ болот;

в) тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин узундугу $9\,дм$ ге барабар болсо, анда ошол негизинин каршысындагы орто сызыгынын узундугу $4{,}5\,дм$ ге барабар ж.у.с.

Жалпы ырастоодон (тыянактан) айрым ырастоолорду келтирип чыгаруу ыкмасы дедукция *деп аталат.* Дедукциялык ыкма математикада өтө көп колдонулат. Атап айтканда ар кандай айрым мисалдарды чыгарууда, биз дайыма мурда далилденген теоремалардан (жалпы ырастоолордон) пайдаланабыз. Демек дедукция - бул жалпы ырастоонун чын экендигинен, андан келип чыккан айрым ырастоолордун да чын боло тургандыгын айгинелейт.

Ал эми *айрым (жекече) ырастоолордун негизинде жалпы тыянак чыгаруу ыкмасы* индукция *деп аталат.* Мисалы, мейли алгачкы n жуп натуралдык сандардын суммасын табуу керек болсун дейли. Алдын айрым учурларды карайлы:

$$2 = 2 = 1 \cdot 2;$$
$$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3;$$
$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4;$$
$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5.$$

Бул каралган айрым учурлардан, божомолдоп мындай жалпы тыянакка келебиз:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1).$$

Демек, алгачкы n жуп натуралдык сандардын суммасы $n(n+1)$ ге барабар болот.

Албетте бир нече айрым учурлардын чындык экендигинен, сөзсүз чын боло турган жалпы тыянак келип чыгат деп айтуу ар дайым эле туура боло бербейт. Мисалы, 10 дон чоң эки орундуу натуралдык сандар менен ошол эле цифралардын тескери тартипте жазылышынан пайда болгон натуралдык сандардын суммасы бирдей цифралар менен жазылган натуралдык сан болот деген жалпы тыянак, бир нече айрым учур үчүн туура, б.а.

$$11+11=22;\ 12+21=33;\ 13+31=44;\ 23+32=55;\ 35+53=88.$$

Бирок ырастоо бардык учур үчүн туура эмес, анткени

$$39+93=132 \text{ же } 77+77=154 \text{ ж. б.}$$

болгондо, сумма бирдей цифралардан турбаганын көрөбүз.

Дагы бир мисал. $P(x)=x^2+x+41$ квадраттык үч мүчөсүнүн мааниси, эгерде xтин ордуна 1, 2, 3, 4 натуралдык сандарын койгондо төмөндөгүлөргө барабар болот:

$$P(1)=43;\quad P(2)=47;\quad P(3)=53;\quad P(4)=61.$$

Мында xтин көрсөтүлгөн маанилеринде берилген үч мүчөнүн маанилери - жөнөкөй сандар болушат. Анда биз xтин ар кандай натуралдык маанилеринде $P(x)$ квадраттык үч мүчөсүнүн маанилери жөнөкөй сандар болот деген тыянак чыгарууну божомолдойбуз. Бирок, бул божомолубуз туура эмес, анткени

$$P(41)=41^2+41+41=41\cdot 43 \text{ - курама сан.}$$

Ошентип *айрым бир нече учурларды кароо менен жалпы тыянак чыгарылса, анда мындай ырастоо* **толук эмес индукция** *деп аталат.*

Биз жогоруда көргөндөй, толук эмес индукция ыкмасы дээрлик ишенимдүү тыянакка алып келбейт, бирок ал божомолдуу тыянакты баяндоого пайдалуу мүмкүнчүлүк берет. Тактап айтканда, толук эмес индукция математикада накта так далилдөө ыкмасы болуп эсептелбегени менен кээ бир математикалык жаңы түшүнүктөрдүн ачылышына зор түрткү берет.

Бардык мүмкүн болгон айрым учурларды кароонун негизинде жалпы тыянакка келүү **толук индукция** *деп аталат.* Бул ыкма, качан каралуучу айрым учурлардын саны *чектүү* болгондо (жана *өтө көп болбосо*) гана колдонулаары белгилүү.

Толук индукция ыкмасынын колдонулушуна карата мындай мисалдарды карайлы.

1-мисал. $5<n\le 24$ барабарсыздыгын канааттандыруучу жуп натуралдык сандардын ар бири эки жөнөкөй сандын суммасына барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. Анын үчүн шартта көрсөтүлгөн ар бир натуралдык сан үчүн тиешелүү ажыратылыштардын бардыгын жазып көрөлү:

$$6=3+3;\ 8=3+5;\ 10=5+5;\ 12=5+7;\ 14=7+7;\ 16=11+5;$$
$$18=11+7;\ \ 20=13+7;\ \ 22=11+11;\ \ 24=11+13.$$

Бул он барабардыктан, бизди кызыктырган сандардын ар бири чын эле эки жөнөкөй сандын суммасына ажырагандыгын көрөбүз.

2-мисал. xтин каалаган анык маанисинде

$$x + |x| \geq 0$$

барабарсыздыгынын туура экендигин далилдегиле.

Далилдөө. Мында сандын модулунун аныктамасы кандай учурларда каралганын эске алуу менен ошол учурлардын ар бири үчүн берилген барабарсыздыктын туура экендигин текшерүү керек.

1) $x > 0$ болсун, анда

$$x + |x| = x + x = 2x > 0,$$

бул шартта берилген барабарсыздыктын так учуру аткарылды.

2) $x = 0$ болсун, анда

$$x + |x| = 0 + 0 = 0,$$

мында берилген так эмес барабарсыздыктын барабардык шарты аткарылды.

3) $x < 0$ болсо, анда

$$x + |x| = x - x = 0,$$

мында дагы барабардык шарты аткарылды.

Демек, биз мүмкүн болгон бардык айрым учурларды карап чыктык жана алардын ар бириндe берилген жалпы ырастоо чын экендигин көрсөттүк.

К ө н ү г ү ү л ө р.

1. Төмөндөгү ырастоолордун кайсынысы жалпы жана кайсынысы айрым (жекече) ырастоо:

а) 41 саны - жөнөкөй сан;

б) 8 цифрасы менен аяктаган ар кандай бүтүн сан - жуп сан;

в) $\frac{31}{26}$ саны - буруш бөлчөк;

г) $x^3 + a = 0$ $(a \in R)$ теңдемеси анык тамырга ээ болот;

д) каалаган бурчтун синусунун модулу 1ден ашып кетпейт;

е) 47°тук бурчтун косинусу 1ден кичине;

ж) катеттеринин узундуктары тиешелүү түрдө 6$м$ жана 8$м$ ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугу 10$м$ге барабар;

з) ар кандай төрт бурчтуктун жактарынын тең ортолорун удаалаш туташтырсак, анда параллелограмм пайда болот.

2. Төмөндөгү жалпы ырастоолордун айрым учурларына мисалдар келтиргиле:

а) $y = kx + b$ функциясы - сызыктуу функция болуп эсептелет;

б) ар кандай үч бурчтуктун эки жагынын узундуктарынын суммасы үчүнчү жагынын узундугунан чоң;

в) $ax^2 + bx + c = 0$ теңдемеси, эгерде $a \neq 0$ жана $D>0$ болсо, анда ар дайым эки анык тамырга ээ болот;

г) параллелограммдын диагоналдары бир чекитте кесилишет жана тең экиге бөлүнүшөт.

3. Төмөндөгү ырастоолордун кайсынысы чын, кайсынысы калп жана эмне үчүн андай экендигин түшүндүргүлө:

а) тик бурчтуу үч бурчтуктун бир тар бурчу 38° болсо, анда экинчи тар бурчу 52°ка барабар;

б) $5 - 3x = 0$ теңдемеси эки рационалдуу тамырга ээ;

в) $y = -0.1x^2 + 2$ функциясынын графиги түз сызык болот;

г) -6 санынын ондук логарифмасы жашабайт;

д) кыры $5\,дм$ ге барабар болгон кубдун сыйымдуулугу $100\,дм^3$.

4. 24, 64 жана 104 сандары 4кө бөлүнөт. 4 цифрасы менен аяктаган ар кандай натуралдык сан 4кө бөлүнөт деген тыянакка келүү туура болобу?

5. $\frac{\pi}{6}$ жана $\frac{\pi}{3}$ бурчтарынын тангенси $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ иррационалдык сан. Мындан ар кандай бурчтун тангенси иррационалдык сан болот деп корутунду чыгарса болобу?

6. Тик бурчтуктун жана тең капталдуу трапециянын сыртынан айлана сызууга болот. Анда ар кандай төрт бурчтуктун сыртынан айлана сызууга болот деп айтууга мүмкүнбү?

7. $ax=b$ $(a \neq 0)$ теңдемеси бир гана анык тамырга ээ болоорун далилдегиле.

8. 2ден чоң жана 40тан кичине ар бир n натуралдык жуп саны, эки жөнөкөй сандардын суммасына ажырай тургандыгын далилдегиле (бирок 2ден чоң болгон ар кандай жуп натуралдык сан үчүн бул ырастоонун туура экендигин, ушул убакытка чейин математиктердин эч кимиси айта элек).

9. $y=kx+b$ функциясынын графиги түз сызык болоорун далилдөөдө канча айрым учур каралат жана алар кайсылар экендигин атап көрсөткүлө?

10. Каалаган a жана b анык сандары үчүн

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

барабарсыздыгынын туура экендигин далилдегиле.

1.2. Математикалык индукция методу.

Алды жакта каралган толук индукция ыкмасында кандайдыр бир жалпы ырастоонун туура экендиги, анын мүмкүн болгон бардык (чектүү сандагы) айрым учурларын текшерүүдөн келип чыгаарын көрдүк. Ал эми бардык эле жалпы ырастоолордун айрым учурлары чектүү боло бербейт. Мисалы биз мурда караган алгачкы n натуралдык жуп сандардын суммасы $n(n+1)$ ге барабар деген ырастоо чексиз көп айрым учурлардан турат, анткени натуралдык сандар чексиз. Бул ырастоонун каалаган n натуралдык саны үчүн туура экендигин далилдөө мындайча жүргүзүлөт. Ал барабардыкты кайрадан жазып алалы, б. а.

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1). \qquad (*)$$

Ыңгайлуу болсун үчүн (*) барабардыгын, n натуралдык санына карата $A(n)$ ырастоосу деп белгилеп алалы. Анда $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ жана $A(4)$ айрым ырастоолорунун чындык болоору, (*) барабардыгынын $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ учурларында чындык экендигин билгизет (1.1.п. көрсөтүлгөн).

$A(4)$ ырастоосу: $2+4+6+8=20=4\cdot 5$ чындык болгондуктан, $2+4+6+8+10=4\cdot 5+10=30=5\cdot 6$, б.а. $A(5)$ ырастоосу да чындык.

Бул учурда $A(4)$ түн чындык экендигинен $A(5)$ тин чын боло тургандыгы келип чыкты, б.а. $A(4)\Rightarrow A(5)$ экендиги далилденди.

Ушундай эле жол менен $A(5)$ тен $A(6)$, $A(6)$ дан $A(7)$ ж.б. келип чыгаарын далилдесе болот.

Айталы $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ экендигин далилдейли. Ал дегенибиз $2+4+6+\ldots+2k=k(k+1)$ барабардыгынан $2+4+6+\ldots+2(k+1)=(k+1)(k+2)$ келип чыгаарын билдирет. Чынында эле

$$2+4+6+\ldots+2(k+1)=2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)=$$
$$=k(k+1)+2(k+1)=(k+1)(k+2).$$

Ошентип мындай талкуулоо процессин каалагандай n натуралдык санга чейин жеткирүүгө боло тургандыгы, б.а. $A(n)$ ырастоосун далилдөөгө мүмкүн экендиги көрүнүп турат. Тактап айтканда, $A(n)$ ырастоосу $n=1$ болгондо туура экендиги жана каалаган $n=k$ $(k\in N)$ болгондо $A(k)$ дан $A(k+1)$ келип чыгаары белгилүү болсо, анда $A(n)$ ырастоосу бардык n натуралдык саны үчүн да туура болоору келип чыгат.

Математикада мындай талкуулоо жүргүзүү жагдайын ***математикалык индукция принциби*** деп айтышат жана анын так баяндамасын мындайча аныкташат.

Математикалык индукция принциби: **эгерде n натуралдык санынан көз каранды болгон $A(n)$ сүйлөмү $n=1$ болгондо чындык болуп жана анын $n=k$ $(k\in N)$ үчүн чындык экендигинен кийинки $n=k+1$ саны үчүн дагы чын боло тургандыгы келип** чыкса, анда $A(n)$ сүйлөмү каалаган n натуралдык саны үчүн да чындык болот.

Ошондой эле кээ бир учурларда кандайдыр бир ырастоону бардык натуралдык сандар үчүн эмес белгилүү бир $n \geq p$ (мында p - берилген натуралдык сан) болгон учурлар үчүн дагы далилдөөгө туура келет. Бул учурда математикалык индукция принциби мындайча баяндалат: эгерде $A(n)$ сүйлөмү $n=p$ болгондо чындык болуп жана каалаган $k \geq p$ үчүн $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ болсо, анда $A(n)$ сүйлөмү ар кандай $n \geq p$ учурунда дагы чындык болот.

Аталган принцип математикада көп колдонулган *натуралдык сандардын арифметикасынын аксиомаларынын* бири болуп эсептелет жана бул принциптин негизинде далилдөө ыкмасын ***математикалык индукция методу*** деп айтышат.

Математикалык индукция методу менен далилдөө *эки бөлүктөн* турат:

а) далилденүүчү ырастоо $n=1$ учуру үчүн текшерилет, б.а. $A(1)$ ырастоосунун чындык экендиги аныкталат;

б) $A(n)$ ырастоосун каалаган $n=k$ $(k \in N)$ үчүн туура деп божомолдоп, $n=k+1$ үчүн дагы $A(n)$ ырастоосунун туура болушу, б.а. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ экендиги далилденет.

Эгерде далилдөөнүн бул эки бөлүгү тең жүргүзүлсө, анда математикалык индукция принцибинин негизинде $A(n)$ ырастоосу каалаган n натуралдык саны үчүн дагы чындык болот.

Эми бул методдун колдонулушуна карата бир нече мисалдар карап көрөлү.

1-мисал. n дин каалаган натуралдык мааниси үчүн

$$\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

суммасын эсептеп чыгаргыла.

Чыгаруу. Бул сумманы биз S_n деп белгилеп алалы. Ал S_n суммасы кандай формула менен туюнтулаарын билиш үчүн, бул сумманын алгачкы бир нече маанилерин эсептеп көрөлү:

$$S_1=\frac{1}{1 \cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$S_2=\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}=S_1+\frac{1}{2 \cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3};$$

$$S_3=\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 4}=S_2+\frac{1}{3 \cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = S_3 + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

Булардан биз ар бир сумма - алымы сумманын номерин көрсөткөн сан, ал эми бөлүмү ошол алымдагы санга бирди кошкондогу сан болгон бөлчөккө барабар экендигин байкайбыз. Мындан биз каалаган n натуралдык саны үчүн берилген сумма төмөнкүгө барабар болот деген божомолдуу тыянакка (гипотезага) келебиз:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

Эми бул гипотезанын б.а. (1) барабардыктын туура экендигин далилдөө үчүн математикалык индукция методун пайдаланабыз. Айталы, каалаган n натуралдык саны үчүн (1) барабардыгын $A(n)$ менен белгилеп алалы, анда

а) $A(1)$ - туура, анткени $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$;

б) $n = k$ $(k \in N)$ үчүн (1) барабардыгы, б.а. $A(k)$

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

туура деп, $n = k+1$ үчүн $A(k+1)$

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

барабардыгынын туура боло тургандыгын келтирип чыгаралы, б.а. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ экендигин далилдейли.

Чынында эле

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Ошентип, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Демек математикалык индукция принцибинин негизинде (1) барабардыгы каалаган n натуралдык саны үчүн дагы туура экендиги далилденди.

2-мисал.

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right)\ldots\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}. \qquad (2)$$

барабардыгынын ар кандай n натуралдык саны үчүн туура экендигин далилдегиле.

Далилдөө. а) $n=1$ учурун текшерели

$$1-\frac{4}{1}=-3 \quad \text{жана} \quad \frac{1+2\cdot 1}{1-2\cdot 1}=-3, \quad \text{анда} \quad -3=-3,$$

б.а. $A(1)$ - чындык.

б) $n=k$ $(k\in N)$ учурунда

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}$$

барабардыгы б.а. $A(k)$ ырастоосу туура болсун деп $A(k+1)$дин туура экендигин көрсөтөлү:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1+2k}{1-2k}\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\frac{(2k+1)^2-4}{(2k+1)^2}=$$

$$=\frac{(2k-1)(2k+3)}{(1-2k)(2k+1)}=\frac{2k+3}{-2k-1}=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}.$$

Ошентип, $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ экендиги далилденди.

Демек, математикалык индукция принцибинин негизинде (2) барабардыгы каалаган n натуралдык саны үчүн да туура болот.

3-мисал. n дин каалаган натуралдык маанисинде $7^{n+2}+8^{2n+1}$ туюнтмасынын мааниси 57санына эселүү болоорун далилдегиле.

Далилдөө. Алгач $n=1$ учурун текшерсек:

$$7^{1+2}+8^{2\cdot 1+1}=7^3+8^3=15\cdot 57,$$

мында алынган көбөйтүндү 57ге бөлүнөт, б.а. $A(1)$ - чындык.

Эми $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ экендигин көрсөтөлү, б.а. $7^{k+2}+8^{2k+1}$ саны 57ге бөлүнсө, анда $7^{k+3}+8^{2k+3}$ саны да 57ге бөлүнөөрүн келтирип чыгаралы.

Чындыгында, $\quad 7^{(k+1)+2}+8^{2(k+1)+1}=7^{k+3}+8^{2k+3}=$

$$=7\cdot 7^{k+2}+64\cdot 8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+2}+(7+57)\cdot 8^{2k+1}=7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}.$$

$A(k)$ ырастоосу чындык болгондуктан $7(7^{k+2}+8^{2k+1})$ саны 57ге бөлүнөт, ал эми $57\cdot 8^{2k+1}$ санынын 57ге эселүү экендигиги өзүнөн эле көрүнүп турат. Анда кошулуучулардын ар бири берилген санга бөлүнгөндүктөн, алардын суммасы да берилген санга бөлүнөт, б.а.

$$7^{k+3}+8^{2k+3}=7(7^{k+2}+8^{2k+1})+57\cdot 8^{2k+1}$$

саны 57ге эселүү экендиги келип чыгат.

Ошентип математикалык индукция принцибинин негизинде, n каалаган натуралдык сан болгондо $7^{n+2}+8^{2n+1}$ туюнтмасынын мааниси 57ге эселүү экендиги далилденди.

4-мисал. $x>-1$ болгондо

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad (3)$$

барабарсыздыгы (Я.Бернуллинин барабарсыздыгы), каалаган n натуралдык саны үчүн туура экендигин далилдегиле.

Далилдөө. а) $n=1$ учурун текшерели, б.а. $(1+x)^1=1+x$. Мында берилген так эмес барабарсыздыктын «=» учуру аткарылды, ошондуктан $A(1)$ ырастоосу туура.

б) $n=k$ $(k\in N)$ үчүн

$$(1+x)^k \ge 1+kx$$

барабарсыздыгы туура болсун дейли. Бул барабарсыздыктын эки жагын $(1+x)$ке көбөйтсөк, $1+x>0$ болгондуктан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(1+x)^{k+1} \ge (1+kx)(1+x)$$

же

$$(1+x)^{k+1} \ge 1+(k+1)x+kx^2.$$

Ал эми $kx^2\ge 0$ экендигин эске алсак, анда акыркы барабарсыздык мындай көрүнүшкө келет

$$(1+x)^{k+1} \ge 1+(k+1)x+kx^2 \ge 1+(k+1)x$$

же $(1+x)^{k+1}\ge 1+(k+1)x$, б. а. $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ далилденди.

Демек математикалык индукция принцибинин негизинде, каалаган n натуралдык саны үчүн (3) барабарсыздыгы туура экендиги келип чыгат.

5-мисал. Каалаган $n\ge 5$ натуралдык саны үчүн

$$2^n > n^2 \qquad (4)$$

барабарсыздыгынын туура экендигин далилдегиле.

Далилдөө. а) $n=5$ болсо берилген барабарсыздык $2^5>5^2$ көрүнүшүндөгү туура сан барабарсыздыгына келет, б.а. $A(1)$ - чындык.

б) $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ экендигин далилдейли. Айталы $n=k$ $(k\ge 5)$ үчүн $2^k>k^2$ барабарсыздыгы туура болсун дейли. Эгерде бул барабарсыздыктын эки жагын 2ге көбөйтсөк, анда

$$2^{k+1} > 2k^2 = k^2+k^2.$$

Ал эми $k\ge 5$ болгондуктан $k^2>2k+1$ экендиги ар дайым туура, ошондуктан $2^{k+1}>k^2+k^2>k^2+2k+1$, б.а. $2^{k+1}>(k+1)^2$ келип чыгат.

Бул учурда дагы каалагандай $n \geq 5$ натуралдык саны үчүн (4) барабарсыздыгынын туура экендиги, жогоруда аталган принциптин негизинде келип чыгат.

Эскертүү. Математикалык индукция принцибинин негизинде далилдөөдө каралуучу эки этаптын 1-этабы, 2-этабына салыштырмалуу анчейин эле маанилүү эмес деген ойго келүү, б.а. далилдөө жүрүүзүүдө 1-этапка токтолуп олтурбай эле 2-этапты гана текшергенбиз жетиштүү болот деп бүтүм чыгарганыбыз туура эмес.

Мисалы «n дин ар кандай натуралдык маанисинде $2n+1$ саны жуп сан болот» - деген ырастоонун чын экендигин далилдейли.

Далилдөө. Мейли бул ырастоо $n=k$ $(k \in N)$ учуру үчүн туура, б.а. $2k+1$ - жуп сан болсун дейли. Эми $2(k+1)+1$ санынын жуп экендигин далилдейли. Чындыгында,

$$2(k+1)+1=(2k+1)+2.$$

Алдыда $2k+1$ - жуп сан дегенибизден, ал жуп сан менен 2 санынын суммасы да жуп сан болот, б.а. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ экендиги келип чыкты. Ырастоонун чын экендиги далилденди. Бирок, эгерде $n=1$ учурунда берилген ырастоонун тууралыгын текшерип көргөндө, анда ал ырастоонун чын эмес экендиги келип чыкмак.

Демек, математикалык индукция методунда эки этап тен сөзсүз каралышы негизги талап болуп эсептелет.

К ө н ү г ү ү л ө р.

11. а) (a_n) арифметикалык прогрессиясы үчүн эгерде анын a_1 - биринчи мүчөсү менен d - айырмасы белгилүү болсо, анда

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{жана} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$$

экендигин математикалык индукция методу менен далилдегиле.

б) (b_n) геометриялык прогрессиясы үчүн эгерде анын b_1 - биринчи мүчөсү менен q - бөлүмү белгилүү болсо, анда

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad \text{жана} \quad S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} \quad (q \neq 1)$$

формулаларынын туура экендигин математикалык индукция методун пайдаланып далилдегиле.

12. Төмөндөгү суммаларды тапкыла.

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

13. Каалаган n натуралдык саны үчүн төмөндөгү барабардыктардын туура экендигин далилдегиле.

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

в) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

г) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

д) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

е) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$;

ж) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

з) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

и) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$;

к) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

14. Каалаган n натуралдык саны үчүн $4^n - 1$ туюнтмасынын мааниси 3 кө калдыксыз бөлүнөөрүн далилдегиле.

15. n каалаган натуралдык сан болгондо $n^3 + 5n$ туюнтмасынын мааниси 6 га эселүү экендигин далилдегиле.

16. Ар кандай n натуралдык саны үчүн $6^{2n-1} + 1$ туюнтмасынын мааниси 7 ге эселүү экендигин далилдегиле.

17. Ар кандай n натуралдык саны үчүн $4^n + 15n - 10$ туюнтмасынын мааниси 9 га калдыксыз бөлүнөөрүн далилдегиле.

18. Каалагандай n натуралдык сан үчүн $9^{n+1} - 8n - 9$ туюнтмасынын мааниси 16 га эселүү экендигин далилдегиле.

19. n каалаган натуралдык сан болгондо;

а) $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ туюнтмасынын мааниси 11 ге;

б) $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ туюнтмасынын мааниси 17ге калдыксыз бөлүнөөрүн далилдегиле.

20. Ар кандай n натуралдык так саны үчүн n^3-n туюнтмасынын мааниси 24 кө эселүү экендигин далилдегиле.

21. Каалаган n натуралдык саны үчүн $4^n > n^2$ барабарсыздыгы туура экендигин далилдегиле.

22. Ар кандай $n > 1$ натуралдык сандары үчүн

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

барабарсыздыгынын туура экендигин далилдегиле.

II. ЧЕКСИЗ САН УДААЛАШТЫКТАРЫ, АЛАРДЫН ПРЕДЕЛИ

2.1. Сан удаалаштыктары жана алардын берилиш жолдору.

Айрым бир сан удаалаштыктары менен силер алгач 9-класстан эле таанышкансыңар. Мисалы,

а) биринчи мүчөсү 3 кө, ал эми айырмасы –2 ге барабар болгон арифметикалык прогрессия:

$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \ldots;$$

б) биринчи мүчөсү 2 ге жана бөлүмү 1,5 ке барабар болгон геометриялык прогрессия:

$$2;\ 3;\ 4{,}5;\ 6{,}75;\ 10{,}125;\ \ldots;$$

в) $\alpha = a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ анык санынын кеми менен алынган ондук жакындаштырылган маанилери:

$$\alpha_1 = a, a_1;\ \alpha_2 = a, a_1 a_2;\ \alpha_3 = a, a_1 a_2 a_3;\ \ldots\ \alpha_n = a, a_1 a_2 \ldots a_n;\ldots$$

Ошондой эле мүчөлөрүнүн саны чектүү жана чексиз болушунан сан удаалаштыктары да *чектүү* жана *чексиз* болуп бөлүнүшөт деп айтканбыз. Мындан ары биз чексиз сан удаалаштыктарына гана токтолобуз жана эгерде сан удаалаштыгы же жөн эле удаалаштык деп айтсак, анда биз аны чексиз сан удаалаштыгы экен деп түшүнөбүз.

Аныктама. **N натуралдык сандардын көптүгүндө аныкталган сан функциясынын маанилеринин жыйындысы *чексиз сан удаалаштыгы*** деп аталат.

Сан удаалаштыгын берүү дегенибиз - бул ар бир n натуралдык санына (номерине), жалгыз бир гана сан (n номерине ээ болгон удаалаштыктын мүчөсү) таандык боло турган туура келүүчүлүктү көрсөтүү болуп эсептелет. Мындан $f(1)$ - удаалаштыктын биринчи мүчөсү, $f(2)$ - экинчи, ... , $f(n)$ - удаалаштыктын энинчи мүчөсү экендиги келип чыгат. Көбүнчө удаалаштыктын мүчөлөрүн индекси бар тамгалар менен белгилешет:

$$f(1)=u_1;\quad f(2)=u_2;\quad f(3)=u_3;\ \ldots;\ f(n)=u_n;\ldots$$

же кыскача (u_n), б.а.

$$(u_n):\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ldots,\ u_n,\ldots$$

Сан удаалаштыктарынын берилишинин ар түрдүү жолдору бар. Төмөндө биз ал жолдордун негизгилерине токтолуп кетели.

1. Удаалаштык ***аналитикалык*** жол менен берилиши мүмкүн, б.а. n номери боюнча удаалаштыктын u_n мүчөсүн табуунун формуласы менен. Мисалы, эгерде каалаган n үчүн $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ болсо, анда

$$u_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1+3} = \frac{1}{4}; \quad u_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}; \quad u_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3+3} = \frac{5}{6}; \ldots$$

б.а. (u_n): $\quad \dfrac{1}{4}; \quad \dfrac{3}{5}; \quad \dfrac{5}{6}; \ldots; \quad \dfrac{2n-1}{n+3}; \ldots$

Номери боюнча сан удаалаштыктын каалаган мүчөсүн табууга мүмкүн болгон формула, сан удаалаштыгынын ***жалпы мүчөсүнүн формуласы*** деп аталат.

Эгерде $a_n = 3,\ n \in N$ болсо, анда удаалаштыктын бардык мүчөлөрү 3 кө барабар, б.а. (a_n): 3, 3, 3,.... Бардык мүчөлөрү дал келишкен удаалаштыкты *турактуу удаалаштык* же жөн эле *турактуулар* деп айтышат.

2. Кээде сан удаалаштык, анын мүчөлөрүн ***баяндап түшүндүрүү*** менен да берилет. Мисалы,

$$2{,}3;\ 2{,}24;\ 2{,}237;\ 2{,}2361;\ \ldots .$$

удаалаштыгы $\sqrt{5}$ санынын 0,1; 0.01; 0.001; 0.0001; ж.у.с. тактыкта ашыгы менен алынган маанилеринен түзүлгөн деп айтышат. Мындай учурларда көбүнчө жалпы мүчөсүнүн формуласын аныктоого мүмкүн эмес; ошентсе да удаалаштык толугу менен аныкталган болот.

3. Айрым учурларда удаалаштыктын алгачкы бир же бир нече мүчөлөрү берилип, ал эми кийинки мүчөлөрү тигил же бул эреженин же формуланын негизинде, ошол берилген мүчөлөр аркылуу аныкталат, б.а. удаалаштык ***реккуренттик*** жол менен берилет. Мисалы:

а) $a_1 = -2;\ \ a_2 = 3,$ ал эми $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ болсун дейли, анда

$$(a_n): \quad -2, \ \ 3, \ \ 5, \ \ 2, \ \ -3, \ \ -5, \ \ldots .$$

б) $x_1 = 1;\ \ x_2 = 1,$ ал эми ар кандай $n \geq 3$ үчүн $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ болсо, анда (x_n) удаалаштыгы мындай көрүнүштө болот:

$$1, \ \ 1, \ \ 2, \ \ 3, \ \ 5, \ \ 8, \ \ 13, \ \ 21, \ \ 34 \ldots$$

Бул удаалаштыктын мүчөлөрү «Фибоначчи саны»(Фибоначчи, б.а. «Боначчо уулу» деп аталган италиялык математик Леонард Пизанский (1170-1250-ж.ж.)). Бул сандар бир кыйла кызык касиеттерге ээ болушат, бирок биз аларга азыр токтолбойбуз.

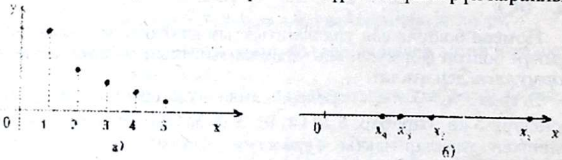
Эми биз берилген удаалаштыктын геометриялык сүрөттөлүшүнө токтололу. Аны эки жол менен берүүгө болот.

Биринчи жол. (u_n) удаалаштыгы функция болгондуктан, анын геометриялык сүрөттөлүшү функциянын графиги катары, б.а. координата тегиздигиндеги $M(n,u_n)$ чекиттеринин көптүгү аркылуу көрсөтүлөт.

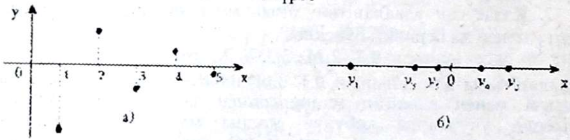
Экинчи жол. Удаалаштыктын мүчөлөрү, сан огунда тиешелүү чекиттер менен сүрөттөлүп көрсөтүлөт.

Бул учурларда октордогу масштаб бирдиктерин түрдүүчө тандап алуу кээде бир кыйла ыңгайлуу болот.

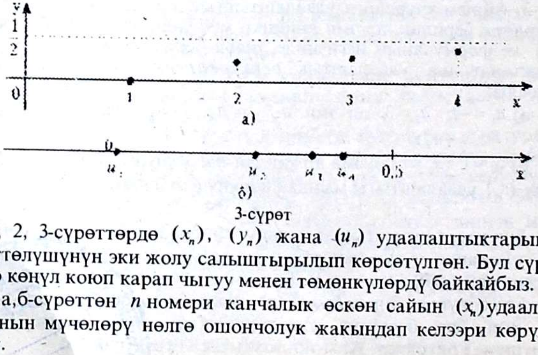
Мисалы, $x_n = \dfrac{2}{n}$; $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; $u_n = \dfrac{n-1}{2n}$ формулалары менен берилген удаалаштыктардын геометриялык сүрөттөлүштөрүн карайлы.



1-сүрөт



2-сүрөт



3-сүрөт

1, 2, 3-сүрөттөрдө (x_n), (y_n) жана (u_n) удаалаштыктарынын сүрөттөлүшүнүн эки жолу салыштырылып көрсөтүлгөн. Бул сүрөттөргө көңүл коюп карап чыгуу менен төмөнкүлөрдү байкайбыз.

1,а,б-сүрөттөн n номери канчалык өскөн сайын (x_n) удаалаштыгынын мүчөлөрү нөлгө ошончолук жакындап келээри көрүнүп турат.

2,а,б-сүрөттөн $\left|y_n\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ болгондуктан, n номери чонойгон сайын (y_n) удаалаштыгынын мүчөлөрү бара-бара нөлгө жакындаганын, бирок эки жагынан умтулганын көрөбүз.

Ошондой эле 3,а,б-сүрөт боюнча n номеринин өсүшү менен (u_n) удаалаштыгынын мүчөлөрү $\frac{1}{2}$ге умтулганын байкайбыз. Бул фактыларга кийинки 2.3-пунктта кенири токтолобуз.

Көнүгүүлөр.

23. а) (x_n) удаалаштыгы $x_n = \frac{2n-3}{n+2}$ формуласы менен берилген x_{10}; x_{20}; $x_{n+1} - x_n$ - дерди тапкыла?

б) (y_n) удаалаштыгы $y_n = \frac{n}{3^n}$ формуласы менен берилген y_3; y_5; y_{n+1}; $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ – тапкыла?

24. Жалпы мүчөсү төмөнкүлөргө барабар болгоҥ удаалаштыктардын алгачкы 5 мүчөсүн жазгыла:

а) $a_n = 1 + 3n$; $b_n = 2^{-n}$; $c_n = \frac{3+n}{n}$;

б) $x_n = 2^n - 1$; $y_n = 2 + \frac{3}{n}$; $z_n = \frac{2n-1}{5+n}$.

25. Берилген удаалаштыктардын ар бири үчүн жалпы мүчөсүнүн формуласынын жазгыла:

а) 1, 3, 5, 7, 9, ... ; б) 2, 4, 6, 8, 10, ... ;

в) 4, -4, 4, -4, 4, ... ; г) 1, 9, 25, 49, 81, ...;

д) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$; е) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

ж) $tg 45^\circ$, $tg 22^\circ 30'$, $tg 11^\circ 15'$, ...;

з) $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}$, ...

26. (y_n) удаалаштыгынын кайсы мүчөлөрү үчүн төмөнкү шарттар аткарылат:

а) эгерде $y_n = 2n - 5$ болсо, $y_n > 200$?

б) эгерде $y_n = 3n + 10$ болсо, $y_n < 45$?

27. Эгерде: а) эгерде $x_1 = 10$, $x_{n+1} = x_n + 5$, $n > 1$;

б) эгерде $x_1 = 4$, $x_{n+1} = -x_n$, $n > 1$

болсо, (x_n) удаалаштыгынын алгачкы 4 мүчөсүн жазгыла жана удаалаштыкты n - мүчөсүнүн формуласы менен бергиле.

28. (a_n) удаалаштыгынын геометриялык сүрөттөлүшүн (эки жол менен) көрсөткүлө:

а) $a_n = \frac{n^2}{2} - 4$; б) $a_n = \frac{2n-3}{n}$;

в) $a_n = (-1)^n n$; г) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

29. (x_n) удаалаштыгын каалаган бир жол менен геометриялык сүрөттөп көрсөткүлө. Бул удаалаштык «умтулган» кандайдыр бир сан жашайбы же жашабайбы, ошону айтып бергиле:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$; б) $x_n = n^2 + 2$;

в) $x_n = \frac{4n-1}{3n}$; г) $x_n = \frac{5n+(-1)^{n+1}}{n}$.

2.2. Монотондуу жана чектелген удаалаштыктар.

Силер өсүүчү жана кемүүчү сан удаалаштыктары жөнүндөгү айрым маалыматтар менен мурунку класстан эле таанышкансыңар. Эми алар жөнүндө кеңири токтолуп көрөлү.

1-*аныктама.* Эгерде (u_n) удаалаштыгынын экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир мүчөсү өзүнөн мурдагысынан чоң болсо, б.а. каалаган $n \in N$ үчүн $u_{n+1} > u_n$ барбарсыздыгы аткарылса, анда ал удаалаштык *өсүүчү* деп аталат.

Мисалы (u_n): $\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \ldots ; \frac{2n}{2n+1}; \ldots$ удаалаштыгы өсүүчү, анткени

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)}{2n+3} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 2n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{2(2n^2+3n+1-2n^2-3n)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} > 0.$$

Мындан барабарсыздыктын аныктамасы боюнча $u_{n+1} > u_n$ экендиги келип чыгат.

2-*аныктама.* Эгерде (u_n) удаалаштыгынын экинчи мүчөсүнөн баштап ар бир мүчөсү өзүнөн мурдагысынан кичине болсо, б.а. каалаган $n \in N$ үчүн $u_{n+1} < u_n$ барабарсыздыгы аткарылса, анда ал удаалаштык ***кемүүчү*** деп аталат.

Мисалы (u_n): $5, 1, \frac{9}{13}, \dots, \frac{2n+3}{6n-5}, \dots$ удаалаштыгы кемүүчү, себеби

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{6n+1} - \frac{2n+3}{6n-5} = \frac{12n^2+20n-25-12n^2-20n-3}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{-28}{(6n-5)(6n+1)} < 0$$

Мында дагы барабарсыздыктын аныктамасын эске алсак $u_{n+1} < u_n$ экендиги келип чыгат.

Ушулар сыяктуу эле кемибөөчү (же өспөөчү) удаалаштыктар, б.а. каалаган $n \in N$ үчүн $u_{n+1} \geq u_n$ (же $u_{n+1} \leq u_n$) шартын канааттандырган удаалаштыктар да кездешет, бирок биз аларга бул жерде токтолуп олтурбайбыз.

Өсүүчү жана кемүүчү (ошондой эле кемибөөчү жана өспөөчү) удаалаштыктар ***монотондуу удаалаштыктар*** деп аталат.

Кээде оң мүчөлүү монотондуу удаалаштыкты аныктоо үчүн $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ катышын 1 менен салыштыруу аркылуу жетишүүгө боло тургандыгын билгенибиз да абзел.

Мисалы (x_n) оң мүчөлүү удаалаштыгы $x_n = \frac{4n-1}{3n}$ формуласы менен берилсин дейли. Бул удаалаштык монотондуу экендигин көрсөтөлү.

(x_n) удаалаштыгында $x_n = \frac{4n-1}{3n}$ болгондуктан $x_{n+1} = \frac{4n+3}{3(n+1)}$ болот. Анда

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4n+3}{3(n+1)} : \frac{4n-1}{3n} = \frac{(4n+3)n}{(n+1)(4n-1)} = \frac{4n^2+3n}{4n^2+3n-1}.$$

Каалаган $n \in N$ үчүн бул бөлчөктүн алымы бөлүмүнөн чоң болот.

Ар кандай эле удаалаштык монотондуу боло бербейт. Мисалы,

$$(a_n): \quad 1;\ -0{,}1;\ 0{,}01;\ \dots;\ (-0{,}1)^{n-1};\ \dots$$

жана

$$(b_n): \quad -1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \dots;\ \frac{(-1)^n}{n};\ \dots$$

удаалаштыктары өсүүчү да кемүүчү да эмес.

Бардык мүчөлөрү кандайдыр бир M санынан кичине, б.а. $u_n < M$ $(n \in N)$ болсо, анда (u_n) удаалаштыгы *жогору жагынан чектелген* деп аталат. Мисалы,

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{9}{3},\ \dots,\ \frac{-n^2}{n+1},\dots$$

удаалаштыгы жогору жагынан чектелген, себеби анын бардык мүчөлөрү 0 дөн кичине: $(u_n) < 0$. Мында M дин ролун 0 аткарат. Анын ордуна -0,4; 1; 2; ж.б. сандарынын кайсынысын алсак дале болмок, анткени берилген удаалаштыктын ар кандай мүчөсү көрсөтүлгөн сандардын каалаган биринен кичине болот. Бул учурда M үчүн алардын кайсынысын алуу негизги талап болбостон, ушундай сандардын жок дегенде бирөөнүн жашашы орчундуу маселе болуп эсептелет.

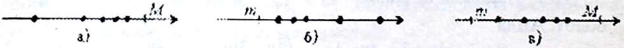
Бардык мүчөлөрү кандайдыр бир m санынан чоң, б.а. $u_n > m$ $(n \in N)$ болсо, анда (u_n) удаалаштыгы *төмөн жагынан чектелген* деп аталат. Мисалы,

$$5,\ 7,\ 9,\ \dots,\ 2n+3,\ \dots$$

удаалаштыгы төмөн жагынан чектелген, анткени анын бардык мүчөлөрү 4 төн чоң ($m=4$). m саны үчүн башка дагы каалаган терс сан же $\frac{1}{2}$, 3 ж.б. алынса деле болот. Мында да жогоруда айтканыбыздай m үчүн көрсөтүлгөн сандардын кайсы бирин тандап алуу эмес, ал сандардын жок дегенде биринин жашашы негизги маселе болуп эсептелет.

Эгерде бардык $n \in N$ үчүн $m < u_n < M$ ($m \le u_n \le M$ болсо дагы) барабарсыздыгы аткарылган m жана M эки саны бар болсо, б.а. удаалаштык бир эле учурда жогору жагынан да жана төмөн жагынан да чектелген болсо, анда (u_n) удаалаштыгы *чектелген* деп аталат.

Бул айтылгандардын геометриялык интерпретациясы мындайча түшүндүрүлөт.



4-сүрөт.

4,а-сүрөттөн, жогору жагынан чектелген удаалаштыктын мүчөлөрүнө туура келген чекиттердин бардыгы M санына туура келген чекиттин сол жагында жайгашканын;

4,б-сүрөттөн, төмөн жагынан чектелген удаалаштыктын мүчөлөрүнө туура келген чекиттердин бардыгы, m санына туура келген чекиттин оң жагында жайгашканын;

4,в-сүрөттөн, чектелген удаалаштыктын бардык мүчөлөрүнө туура келген чекиттер, учтары m жана M сандарына барабар болгон кесиндиде жайгашканын көрөбүз.

1-мисал.

(x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ удаалаштыгы чектелген, себеби бул удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $0 < x_n < 1$ барабарсыздыгын канааттандырат.

2-мисал.

(a_n): $1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \dots$ удаалаштыгы дагы чектелген. Анткени бул удаалаштыктын мүчөлөрү $\sqrt{2}$ санынын ондук жакындатылган маанилери экендигин билебиз. Мындан $1 < a_n < 2$ болгондуктан, бул удаалаштыктын чектелгендиги келип чыгат.

Көнүгүүлөр.

30. Эгерде:

а) $a_n = 2n^2$; б) $a_n = \frac{1-3n}{4}$; в) $a_n = \frac{n+5}{n+1}$;

г) $a_n = \frac{2n-3}{n+4}$; д) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; е) $a_n = 3^{-n} - 1$

болсо, анда (a_n) удаалаштыгы өсөбү же кемийби?

31. Эгерде:

а) $x_{n+1} - x_n > 0$; б) $x_{n+1} - x_n < 0$;

в) $x_{n+1} - x_n \geq 0$; г) $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

барабарсыздыгы каалаган натуралдык n үчүн туура болсо, (x_n) удаалаштыгы жөнүндө эмнени айтууга болот?

32. Эгерде:

а) $y_n = \frac{2n}{2n+1}$; б) $y_n = \frac{2n-3}{3n}$;

в) $y_n = \frac{3n+7}{2n-5}$; г) $y_n = \frac{6n-5}{2n+3}$;

д) $y_n = \frac{n^2}{n^2+n}$; е) $y_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, мында $a > 1$,

болсо, анда (y_n) удаалаштыгынын монотондуулугун далилдегиле.

33. Берилген удаалаштыктардын кайсынысы төмөн (же жогору) жагынан чектелген же чектелбеген экендигин аныктагыла:

а) $-1,\ -3,\ -5, \dots,\ -(2n-1), \dots$;

б) $5,\ 7,\ 9,\ \dots,\ 2n+3,\ \dots$;

в) $\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \ \dots, \ \frac{1}{n}, \ \dots$;

г) $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \ \dots, \ \frac{2n-1}{2n}, \ \dots$;

д) $2, \ -3, \ 4, \ -5, \ \dots, \ (-1)^{n+1}(n+1), \ \dots$;

е) $\cos 1, \quad \cos 2, \quad \cos 3, \ \dots, \ \cos n, \ \dots$.

2.3. Удаалаштыктын пределинин аныктамасы.

Алдыдагы 2.1-пункттагы (18-бетти кара) $u_n = \frac{n-1}{2n}$ формуласы менен берилген удаалаштыкка дагы кайрылып көрөлү. Атап айтканда, n жетишээрлик чоң болгондо $u_n = \frac{n-1}{2n}$ туюнтмасынын мааниси $\frac{1}{2}$ ден өтө эле аз айырмалана тургандыгын көрсөтөлү.

Алдын $u_n - \frac{1}{2}$ айырмасынын модулу 0,01ден кичине болуш үчүн n кандай сан болушу керек деген суроого жооп берели, б.а.

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-1-n}{2n}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$$

болгондуктан, n дин кандай натуралдык маанилеринде

$$\frac{1}{2n} < 0{,}01$$

боло тургандыгын аныктоого алып келет. Бул барабарсыздык

$$2n > 100 \quad \text{же} \quad n > 50$$

барабарсыздыгына тең күчтүү. Анда

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01$$

барабарсыздыгы каалагандай $n > n_0 = 50$ үчүн туура болот.

Эгерде 0,01дин ордуна 0,00001ди алсак, анда жогорудагыдай эле эсептөөлөрдү жүргүзүү менен каалагандай $n > n_0 = 50000$ үчүн

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < 0{,}00001$$

боло тургандыгын алабыз.

Ошентип, каалагандай кичине ε оң санынын алсак

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы $n > n_0$ болгон бардык n үчүн аткарылат. Мында n_0 үчүн $\frac{1}{2\varepsilon}$ санынын бүтүн бөлүгү алынат.

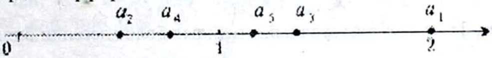
Жыйынтыктап айтканда, n дин жетишээрлик өсүшүндө (u_n) удаалаштыгы $\frac{1}{2}$ ге жакын болооруна (же б.а. умтулганына) ишенүүгө болот.

Дагы бир жалпы мүчөсү $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ болгон

$$1+\frac{1}{1};\quad 1-\frac{1}{2};\quad 1+\frac{1}{3};\quad 1-\frac{1}{4};\ \ldots$$

удаалаштыгын карайлы.

Берилген удаалаштыктын геометриялык сүрөттөлүшү төмөнкүдөй көрүнүштө болот.



5-сүрөт.

5-сүрөттөн n дин өсүшү менен удаалаштыктын мүчөлөрүнө туура келген чекиттер 1 чекитине бирде оң жагынан, бирде сол жагынан улам жакындап келет. Башкача айтканда, n өскөн сайын $a_n - 1$ айырмасынын модулу уламдан улам кичирейип нөлгө чексиз жакындай берет.

Чынында эле, $|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

Мындан 101-мүчөдөн баштап кийинки бардык мүчөлөр үчүн бул модул 0,01ден кичине; 1001-мүчөдөн баштап кийинки бардык мүчөлөр үчүн бул модул 0,001ден кичине ж.у.с. Жалпысынан айтканда, каалагандай бир кичине $\varepsilon > 0$ санын албайлы (мисалы, ε =0,01; ε =0,001 ж.б.), ар кандай $n > n_0$ үчүн $|a_n - 1| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла турган n_0 номерин көрсөтүүгө болот.

Ошентип, ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн кандайдыр бир n_0 номери жашап жана ушул номерден баштап удаалаштыктын кийинки бардык мүчөлөрү умтулган сандын белгилүү бир аймагына (чекебелине) кирип калса, анда ал умтулган сан берилген удаалаштыктын предели болуп эсептелет.

Аныктама. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $n > n_0$ болгон n дин бардык маанилеринде

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (*)$$

барабарсыздыгы аткарыла турган n_0 натуралдык саны табылса, анда *a саны* (x_n) *удаалаштыгынын предели* деп аталат жана төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ ,$$

же муну (x_n) *сан удаалаштыгынын n чексизге умтулгандагы предели a саны* болот деп да айтышат.

Пределге ээ болгон удаалаштыкты *жыйналат* деп айтабыз.

Удаалаштыктын пределинин геометриялык мааниси мындайча түшүндүрүлөт. Аныктамадагы (*) барабарсыздыгынан

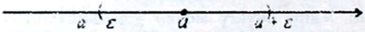
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{же} \quad a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \qquad (**)$$

кош барабарсыздыгы келип чыгат.

(**) кош барабарсыздыгы, a санына жыйналуучу (x_n) удаалаштыгынын $n > n_0$ номерлүү бардык мүчөлөрү, б.а.

$$x_{n_0+1},\quad x_{n_0+2},\quad x_{n_0+3},\ \ldots$$

мүчөлөрү $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ интервалына таандык болот дегенди билдирет.



6-сүрөт.

$]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ интервалы a чекитинин *ε-аймагы* (же *чеке-бели*) деп аталат (6-сүр.).

Мына ошентип, эгерде a саны (x_n) удаалаштыгынын предели болуп эсептелсе, анда ал удаалаштыктын чектүү мүчөлөрүнөн башка бардык мүчөлөрү a чекитинин каалагандай (эркинче алынган) кичине аймагына таандык болушат.

Эми пределге карата төмөнкүдөй мисалдарды карап көрөлү.

1-мисал.

$$1\frac{1}{2}\ ,\quad 2\ ,\quad 2\frac{1}{4}\ ,\quad 2\frac{2}{5}\ ,\ \ldots\ ,\quad \frac{3n}{n+1}\ ,\ldots$$

удаалаштыгынын предели 3кө барабар, б.а.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$$

экендигин далилдейли.

Далилдөө.

$$\left|a_n - 3\right| = \left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n-3n-3}{n+1}\right| = \left|-\frac{3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$$

келип чыгат. Мындан n өскөн сайын ($a_n - 3$) түн модулу өтө эле кичине болоору көрүнүп турат. Мисалы, $n>30$ болгондо бул модул 0,1ден кичине, $n>300$ болгондо ал 0,01ден кичине жана ушул сыяктуу болот. Жалпысынан алганда, ε саны кандай гана кичине оң сан болбосун $n>n_0$ боло турган бардык n үчүн

$$|a_n-3|<\varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарыла тургандай n_0 номерин дайыма табууга болот. Чындыгында,

$$|a_n-3|=\frac{3}{n+1}.$$

Эгерде (a_n-3) түн модулу $\varepsilon=0{,}1$ден кичине болсун десек, анда nди

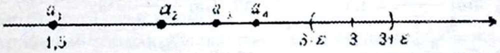
$$n>-1+\frac{3}{0{,}1}$$

шартынан, б.а. $n=30$ дан баштап тандап алуу керек. Ал эми $\varepsilon=0{,}001$ болгондо, биз

$$n>-1+\frac{3}{0{,}001}$$ ди алаар элек.

Демек, $|a_n-3|<0{,}001$ шарты $n=3000$ден баштап бардык n үчүн аткарылат ж.у.с.

Эгер биз каралып жаткан сан удаалаштыгынын мүчөлөрүн сан огундагы чекиттер менен сүрөттөй турган болсок (7-сүр.), анда алар



7-сүрөт.

n өскөн сайын абциссасы 3кө барабар болгон чекитке сол жактан улам жакындай бере тургандыгын байкайбыз. Ар кандай $\varepsilon>0$ үчүн, $n>n_0$ номерден баштап бардык чекиттер $]3-\varepsilon, 3[$ интервалында жаткандай номер n_0ду көрсөтүүгө болот. Ошондой эле бул учурда ал чекиттердин бардыгы $]3-\varepsilon, 3+\varepsilon[$ интервалында да жатат деп айтууга мүмкүн. Бул айткандарыбыз берилген удаалаштыктын предели 3кө барабар дегендин геометриялык көрсөтүлүшү болуп эсептелет.

2-мисал. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$ экендигин далилдегиле.

Далилдөө. $$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|\le\frac{1}{n}.$$

n өскөн сайын $\frac{1}{n}$ туюнтмасы, ошону менен бирге $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|$ туюнтмасы да улам барган сайын кичине маанилерди алат. Ошондуктан ε он саны канчалык кичине болгон сайын бардык $n > n_0$ үчүн

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарыла тургандай номер n_0ду көрсөтүүгө болот.

Айрым алганда, $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}01 \quad (\varepsilon = 0{,}01)$,

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < 0{,}001 \quad (\varepsilon = 0{,}001)$$

ж.у.с. болушуна жетишсе болот. Анда мындай учурда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \text{ болот.}$$

Көнүгүүлөр.

Пределдин аныктамасынын негизинде төмөнкү барабардыктарды (№№ 34-41) далилдегиле:

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1;$ 35. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n} = 5;$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n} = 1{,}5;$ 37. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+4} = 3;$

38. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+6}{4n-5} = \frac{1}{4};$ 39. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0;$

40. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1;$ 41. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n} = 0.$

№№ 42-47-көнүгүүлөрдө удаалаштыктардын жалпы мүчөлөрү көрсөтүлгөн. Удаалаштыктардын ар бири үчүн предел a ны тапкыла жана бардык $n > n_0$ үчүн $|a_n - a| < 0{,}01$ барабарсыздыгы аткарылгандай n_0 номерин аныктагыла.

42. $a_n = \frac{2n}{n+1};$ 43. $a_n = \frac{n}{4n+3};$

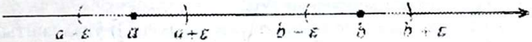
44. $a_n = \frac{5n-1}{2n}$ 45. $a_n = \frac{1-n}{1+n};$

46. $a_n = \frac{3n+2}{n-2};$ 47. $a_n = \frac{n^2-3}{n+2n^2}.$

2.4. Пределдин жалгыздыгы. Жыйналуучу жана жыйналбоочу удаалаштыктар. Жыйналуунун зарыл жана жеткиликтүү шарты.

1-*теорема*. **Эгерде удаалаштык жыйналса, анда ал бир гана пределге ээ болот.**

Далилдөө. Далилдөөнү карама-каршысынан жүргүзөлү. Айталы (x_n) удаалаштыгынын бир нече предели болсун дейли. Мейли a менен b ошол пределдердин экөөсү болсун. Тактык үчүн $a<b$ деп эсептейли. $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ жана $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ аралыктары бири-бири менен жабылбагандай кылып ε оң санын (мис. $\varepsilon=\dfrac{b-a}{4}$ десе болот) тандап алабыз(8-сүр.).



8-сүрөт.

Анда пределдин аныктамасы боюнча (x_n) удаалаштыгынын кандайдыр бир номеринен баштап бардык мүчөлөрү, бир эле учурда $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ жана $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ кесиндилеринде жайланышууга тийиш. Бирок мындай болууга мүмкүн эмес, анткени бул кесиндилер бири-бирин жабышпайт. Мында карама-каршылык келип чыкты. Демек ар түрдүү эки пределдин болушу жөнүндөгү божомолдоо туура эмес болуп эсептелет.

Ошентип ар кандай сан удаалаштыгынын бирден ашык предели болууга мүмкүн эмес.

Ар кандай эле сан удаалаштыгынын предели барбы же жокпу? Бул суроого жооп берүү үчүн, мисалы жалпы мүчөсү

$$x_n = (-1)^n$$

болгон $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ldots$ удаалаштыгын карайлы. Айталы (x_n) удаалаштыгы a санына жыйналат деп божомолдойлу. a чекитинин $\left]a-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2}\right[$ аймагын карайлы. Бул интервалдын узундугу 1ге барабар болгондуктан, анын ичине бир мезгилде (-1) жана 1 чекиттери кире албайт, анткени алардын арасындагы аралык 2ге барабар. Демек, a чекитинин $\left]a-\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2}\right[$ аймагынын сыртында удаалаштыктын чексиз көп сандагы мүчөлөрү жатат, мына ошондуктан a саны (x_n) удаалаштыгынын предели боло албайт.

Дагы бир мисал. $x_n = n$ формуласы менен берилген натуралдык сандардан турган удаалаштыкты карап көрөлү.

Мурдагы мисалдардагыдай эле (x_n) удаалаштыгы жыйналат жана a саны анын предели болот дейли. Мейли $\varepsilon = 1$ деп алалы. Анда пределдин аныктамасы боюнча бардык $n > n_0$ үчүн $|n - a| < 1$ барабарсыздыгы аткарылуучу n_0 номери бар болот. Муну кош барабарсыздык түрүндө мындайча жазабыз:

$$-1 < n - a < 1$$

же бардык $n > n_0$ үчүн

$$a - 1 < n < a + 1$$

болот. Бирок бардык $n > n_0$ үчүн $n < a + 1$ барабарсыздыгы чындык эмес, анткени натуралдык сандардын көптүгү чектелбеген. Демек, бул удаалаштыктын да предели жок.

Ошентип эки гана учурдун болушу мүмкүн: 1) удаалаштыктын предели бар жана ал жалгыз - мындай удаалаштыктарды ***жыйналуучу*** деп айтышат; 2) удаалаштыктын предели жок - мындай удаалаштыктарды ***жыйналбоочу*** (же ***ажыралуучу***) деп айтышат.

2-*теорема*. Эгерде $|q| < 1$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ **болот.**

Далилдөө. Эгерде $q = 0$ болсо, анда каалаган $n \in$ үчүн $q^n = 0$ болот, бул учурда теореманын туура экендиги ачык. Ал эми $q \neq 0$ учуру үчүн адегенде бир жардамчы барабарсыздыкты аныктап кетели. Теореманын шарты боюнча $|q| < 1$ болгондуктан $\frac{1}{|q|} > 1$ болот. Анда $\frac{1}{|q|}$ туюнтмасын төмөнкүчө жазууга мүмкүн:

$$\frac{1}{|q|} = 1 + m, \quad \text{мында } m > 0.$$

Барабардыктын эки жагын тең n-чи даражага көтөрүп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + m)^n.$$

$m > 0$ болгондуктан, Бернуллинин барабарсыздыгы боюнча (13-б. кара)

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + m)^n \geq 1 + nm > nm.$$

Ошондуктан

$$|q|^n < \frac{1}{nm}. \qquad (1)$$

Ушул бизге керек болгон жардамчы барабарсыздык.

Эми теореманын далилдөөсүнө кайрылалы. Биз каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн $n > n_0$ деген шарттан

$$\left|q^n - 0\right| = \left|q\right|^n < \varepsilon$$

келип чыга турган $n_0 \in N$ саны бар экендигин көрсөтүүбүз керек.

Эгерде $n_0 \geq \frac{1}{m\varepsilon}$ деп тандап алсак, анда $n > n_0$ болгондо

$$n > \frac{1}{m\varepsilon} \;\Rightarrow\; nm > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{nm} < \varepsilon$$

болот жана (1) боюнча

$$\left|q^n - 0\right| = \left|q\right|^n < \frac{1}{nm} < \varepsilon, \quad \text{т.к.д.}$$

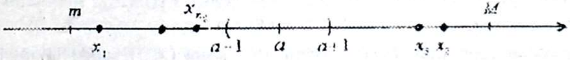
Эгерде (x_n) удаалаштыгы a санына жыйналса, б.а.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

болсо, анда каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн удаалаштыктын чектүү сандагы мүчөлөрүнөн башка бардык мүчөлөрү a чекитинин ε аймагына кирет. Мисалы, эгерде $\varepsilon = 1$ болсо, анда бул удаалаштыктын чектүү сандагы

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots, x_{n_0}$$

n_0 мүчөлөрү $]a-1; a+1[$ аймагынын сыртында жатып калышы мүмкүн (9-сүр.). Жыйынтыктап айтканда, берилген удаалаштыктын бардык мүчөлөрүн ичине камтыган $[m; M]$ кесиндиси бар боло турган m жана M сандары жашай тургандыгын көрөбүз.



9-сүрөт.

Бул учурда ар кандай жыйналуучу удаалаштыктын бардык мүчөлөрүн ичине алган $[m; M]$ кесиндиси бар болот. Мындай касиетке ээ болгон удаалаштыкты *чектелген* деп айтабыз (22-б. кара).

Ошентип удаалаштыктын жыйналуучулугунан анын чектелгендиги келип чыгаарын көрдүк. Демек, *удаалаштыктын чектелгендиги - бул жыйналуучулуктун зарыл шарты* экендигин билдирет.

Алды жакта каралган $x_n = n$ формуласы менен берилген удаалаштыктын жыйналбай тургандыгын эми гана жеңил түшүнүүгө болот, себеби ал чектелген болуп эсептелбейт. Ал эми мисалы,

$$(a_n): \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(b_n): \qquad 1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{9}{5}, \ \dots, \ \frac{3n}{n+2}, \ \dots$$

удаалаштыктары жыйналат, анткени алардын бардык мүчөлөрү тиешелүү түрдө $0 < a_n < 1$ жана $0 < b_n < 3$ барабарсыздыктарын канааттандыраары чындык.

Ушундан улам удаалаштыктын чектелгендиги жыйналуучулуктун жеткиликтүү шарты да болуп жүрбөсүн деген суроо туулушу мүмкүн. Бирок бул суроого терс жооп болот. Анткени, биз алды жакта караган эле

$$(x_n): \quad -1, \ 1, -1, \ 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

удаалаштыгын алсак ал чектелген, б.а. $-1 \le x_n \le 1$. Бирок бул удаалаштык жыйналбайт (жыйналбагандыгын далилдеп көрсөткөнбүз).

Удаалаштыктын жыйналуучулугунун жеткиликтүү шартына төмөндөгү теорема (далилдөөсүз) жооп берет.

3-*теорема(Вейерштрасстыкы)*. **Эгерде удаалаштык монотондуу жана чектелген болсо, анда ал пределге ээ болот.**

Вейерштрасстын теоремасы боюнча удаалаштыктын *монотондуулугу* жана ***чектелгендиги***, жыйналуучулуктун б.а. пределдин жашашынын ***жеткиликтүү шарты*** болуп эсептелет. Бирок бул теоремада пределди табуунун ачык жолу көрсөтүлбөйт. Ошого карабастан көп учурда пределдин жашашы жөнүндөгү теорема гана, пределди эсептеп чыгарууга мүмкүнчүлүк берет. Мындай көз караш менен караганда төмөнкү мисал эң кызыктуу. Бул учурда биз каалаган жыйналуучу (x_n) удаалаштыгы үчүн

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}$$

экендигин пайдаланабыз, анткени (x_n) жана (x_{n-1}) маңызы боюнча бир эле удаалаштык (алар болгону биринчи мүчөсү жана мүчөлөрүнүн номерленүү тартиби боюнча гана айырмаланышат).

Мисал катары 2-теореманы дагы бир жолу башкача далилдеп көрөлү.

Далилдөөнү азыр q оң болгон учурга карата жүргүзөлү. (q_n) удаалаштыгы чектелген, анткени $0 < q^n < 1$ жана $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$ болгондуктан монотондуу кемийт. Демек бул удаалаштык Вейерштрасстын теоремасынын эки шартын тең канааттандырат. Ошондуктан ал пределге ээ болот жана аны a аркылуу белгилесек, анда

$$\lim_{n\to\infty} q^n = a.$$

Бирок,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}(q \cdot q^{n-1}) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = q \cdot a.$$

$a = q \cdot a$ дан $a(1-q)=0$ келип чыгат. $1-q \neq 0$ болгондуктан $a=0$ болот. Бул $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ экендигин билдирет.

$q<0$ учуру $q>0$ учуруна оңой эле алып келинет. Мындан Вейерштрасстын теоремасы мурдагы 2-теореманы далилдөөдө барабарсыздыктарга байланышкан эсептөөлөрү жок эле иштөөгө мүмкүнчүлүк бергендигин көрдүк.

Көнүгүүлөр.

48. Төмөндө берилген удаалаштыктардын кайсынысы жыйналуучу жана кайсынысы ажыралуучу экендигин аныктагыла.

а) $2,\ 4,\ 6, \ldots,\ 2n, \ldots$;

б) $1,\ 1\frac{1}{8},\ 1\frac{1}{6}, \ldots,\ \frac{5n-1}{4n}, \ldots$;

в) $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$;

г) $\frac{1}{6},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{9}, \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{5+n}, \ldots$.

49. Эгерде:

а) $x_n = \frac{6n-3}{3n}$; в) $y_n = (-1)^n + 1$;

б) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$; г) $y_n = 2n-1$.

болсо, (x_n) удаалаштыгы жыйналаарын, ал эми (y_n) удаалаштыгы жыйналбай тургандыгын далилдегиле.

50. Бардык $n > n_0$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктын аткарылышы үчүн (жок дегенде бир) n_0 натуралдык санын көрсөткүлө:

а) $(0,1)^n < 0,1$; б) $(0,1)^n < 0,001$;

в) $(0,2)^n < 0,01$; г) $(0,3)^n < 0,01$.

51. а) $q = \frac{\pi}{3}$; б) $q = -\frac{\pi}{4}$; в) $q = -2$; г) $q = \frac{a+1}{a-1}$

болгондо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ пределинин жашашы мүмкүнбү?

52. Төмөнкү удаалаштыктардын бардык мүчөлөрү таандык болгон $[a, b]$ (мында a жана b кандайдыр бир сан) сан аралыгы барбы:

а) $x_n = \frac{2n+1}{n}$; б) $x_n = (-2)^n$;

в) $x_n = \dfrac{n^2}{3}$; г) $x_n = \dfrac{2n}{3n-1}$.

53. Эгерде:

а) $y_n = 2n-1$; б) $y_n = n^3$;

в) $y_n = \dfrac{1}{3n+2}$ г) $y_n = (-1)^n n$.

болсо, анда (y_n) удаалаштыгы чектелгенби?

2.5. Пределдер жөнүндө теоремалар.

Мындан ары пределдерди эсептеп чыгаруунун жолдору жана аларды кантип жеңилдетүүгө болот деген суроого жооп берүүдө төмөндөгү теоремалар түздөн-түз жардам берет.

1-*теорема.* **Туруктуу чоңдуктун предели өзүнө барабар, б.а.**

$$\lim_{n\to\infty} C = C, \quad C - const.$$

2-*теорема.* **Эгерде (x_n) жана (y_n) удаалаштыктары жыйналса, анда**

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

3-*теорема.* **Эгерде (x_n) жана (y_n) удаалаштыктары жыйналса, анда**

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

Натыйжа. *Туруктуу көбөйтүүчүнү предел белгисинин сыртына чыгарууга болот:*

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot x_n) = C\cdot\lim_{n\to\infty} x_n, \quad C\in R.$$

4-*теорема.* **Эгерде (x_n) жана (y_n) удаалаштыктары жыйналса жана (y_n) удаалаштыгынын предели нөлдөн айырмалуу болсо, анда**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Биз 2-теореманын далилдөөсүн толук көрсөтөлү. Бул теореманы далилдөөдө пределдин аныктамасы жана мурдатан белгилүү

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

барабарсыздыгы колдонулат.

Айталы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болсун дейли. Анда каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн, бардык $n > n_1$ болгондо

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

барабарсыздыгы аткарыла турган n_1 номери табылат жана ошондой эле бардык $n > n_2$ үчүн

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

барабарсыздыгы аткарыла турган n_2 номери табылат. n_1 жана n_2 сандарынын эң чоңун M аркылуу (б.а. $\max(n_1, n_2) = M$ деп) белгилейбиз. Анда каалагандай $n > M$ үчүн (1) барабарсыздык аткарылгандай эле (2) барабарсыздык да аткарылат жана ушул n дер үчүн

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

болот. $\varepsilon > 0$ эркинче алынгандыктан,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

экендиги келип чыгат. Демек теорема далилденди.

2.6. Чексиз кичине удаалаштыктар.

Эгерде чексиз кичине удаалаштыктар түшүнүгүн киргизсек, анда пределдер жөнүндөгү көп теоремалардын, атап айтканда алдынкы пункттун 3-чү жана 4-теоремалары бир кыйла женил далилденет.

Аныктама. **Эгерде (α_n) удаалаштыгынын предели нөлгө барабар болсо, б.а. каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн бардык $n > n_0$ болгондо $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$ аткарыла тургандай n_0 номери табылса, анда (α_n) удаалаштыгы *чексиз кичине удаалаштык* же жөн эле *чексиз кичине* деп аталат.**

Мисалы, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ жана $\alpha_n = q^n$ $(|q| < 1)$ удаалаштыктары чексиз кичинелер болуп эсептелет, анткени

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{жана} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

экендигин алдыдагы пункттарда караганбыз.

1-*теорема.* **Эки чексиз кичинелердин суммасы да чексиз кичине болот.**

Далилдөө. Мейли (α_n) жана (β_n) - эки чексиз кичинелер болушсун дейли. Анда алдынкы пункттун 2-теоремасы боюнча

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 + 0 = 0.$$

Бул $(\alpha_n + \beta_n)$ - удаалаштыгы чексиз кичине экендигин билдирет.

Ошентип, каалагандай чектүү сандагы чексиз кичинелердин суммасы чексиз кичине болоорун математикалык индукция методу менен далидөөгө болот.

2-*теорема.* **Чектелген удаалаштыктын чексиз кичинеге болгон көбөйтүндүсү да чексиз кичине болуп эсептелет.**

Далилдөө. Айталы (x_n) удаалаштыгы чектелген болсун десек, анда бардык $n \in N$ үчүн $|x_n| \leq M$ болгондой $M > 0$ саны бар болот. Эгерде (α_n) чексиз кичине удаалаштык болсо, анда каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн n дин n_0дон чоң бардык маанилеринде $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ болгондой n_0 номери табылат. Анда мындай n дин бардыгы үчүн

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Бул деген $(\alpha_n \cdot x_n)$ - удаалаштыгы чексиз кичине экендигин билдирет.

Натыйжа. *Эки чексиз кичинелердин көбөйтүндүсү да чексиз кичине болот.*

Чындыгында, чексиз кичине удаалаштыктын чектелгендиги анын жыйналуучулугунан эле келип чыгат, анда 2-теореманын негизинде бул ырастоо туура.

3-*теорема.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ барабардыгы аткарылсын үчүн $x_n = a + \alpha_n$ болушу *зарыл* жана *жеткиликтүү* (мында $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$).

Далилдөө. Зарылдыгы. Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсо, анда

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} a = a - a = 0.$$

Жеткиликтүүлүгү. Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ болсо, анда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a + \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a + 0 = a.$$

Эми көбөйтүндүнүн предели жөнүндөгү теореманын далилдөөсүн карайлы (алдыңкы пункттун 3-теоремасы).

Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болсо, анда бардык $n \in N$ үчүн 3-теореманын биринчи бөлүгү боюнча

$$x_n = a + \alpha_n \text{ жана } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

$$y_n = b + \beta_n \text{ жана } \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Бул барабардыктарды мүчөлөп көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n),$$

мында $(a\beta_n)$, $(b\alpha_n)$, $(\alpha_n \beta_n)$ удаалаштыктары чексиз кичинелер болушат, ошондуктан алардын суммасы да чексиз кичине. Демек 3-теореманын экинчи бөлүгүнүн негизинде

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

2.7. e саны

Жалпы мүчөсү $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ болгон

$$\left(1+\frac{1}{1}\right),\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \dots \qquad (1)$$

чексиз сан удаалаштыгын карайлы.

Бул удаалаштыктын монотондуу өсүүчү жана чектелген экендигин көрсөтөлү.

1) $n+1$ санына карата арифметикалык жана геометриялык орто сан жөнүндөгү теореманы

$$\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \left(1+\frac{1}{n}\right),\ \dots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right),\ 1$$

сандарына колдонуп,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}$$

же

$$\frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

экендигин алабыз. Акыркы барабарсыздыктын эки жагын $(n+1)$-чи даражага көтөрүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ же } a_{n+1} > a_n.$$

Каралып жаткан удаалаштыктын монотондуу өсүүчү экендиги ушуну менен далилденет.

2) Эми берилген удаалаштык чектелген удаалаштык экендигин далилдейли. Анын үчүн жалпы мүчөсү

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

болгон дагы бир

$$\left(1-\frac{1}{1}\right),\ \left(1-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{3}\right)^3, \dots \qquad (2)$$

удаалаштыгын карайбыз. (1) удаалаштыктын монотондуулугун далилдеген сыяктуу эле (2) удаалаштыктын монотондуулугу да далилденет, б.а.

$$b_{n+1} > b_n.$$

Анда

$$a_n b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1.$$

Ошондуктан ар кандай $n > 1$ үчүн

$$a_n < \frac{1}{b_n} \text{ болот.}$$

(2) удаалаштыгы монотондуу өскөндүктөн үчүнчү мүчөсүнөн баштап, анын бардык мүчөлөрү экинчи мүчөсүнөн чоң. Ошентип бардык $n \geq 3$ болгондо

$b_n > b_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ болот. Демек, бардык $n \geq 3$ үчүн

$$a_n < \frac{1}{b_2}, \quad \text{б.а. } a_n < 4.$$

Бул барабарсыздык $n = 1$ жана $n = 2$ үчүн да туура, ошондуктан бардык натуралдык n саны үчүн $0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$ болот. Ушуну менен (1) удаалаштыктын чектелгендиги далилденди.

Монотондуу жана чектелген удаалаштыктын предели жөнүндөгү теореманын негизинде (1) удаалаштыктын предели бар деп айтууга болот. Бул пределди e тамгасы менен белгилөө кабыл алынган, б.а.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (3)$$

e=2,7182818284... экендиги эсептелип чыгарылган.

e саны иррационалдуу сан. Белгилүү француз математиги Эрмиттин(1822-1901) айтуусу боюнча бул сан эч кандай бүтүн коэффициенттүү алгебралык теңдеменин тамыры болбогондуктан, ал трансценденттик иррационалдык сан болот.

(3) барабардыгы көптөгөн математикалык изилдөөлөрдө негизги ***эң сонун*** пределдердин бири болуп эсептелинет жана аны көбүнчө ***экинчи сонун предел*** деп айтышат. e санынын математикада өзгөчө маанилүү ролду ойногондугу жөнүндө кийин жогорку математиканы окуп үйрөнгөндө ишенебиз.

2.8. Пределдерди эсептөөгө карата айрым мисалдар.

Айтылган теоремаларды колдонуу менен биз эми бир нече чексиз сан удаалаштыктарынын пределдерин эсептеп чыгаралы.

1-мисал. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{5n+1}$ табуу талап кылынсын.

Чыгаруу. Бул бөлчөктүн алымы жана бөлүмү чектелбеген удаалаштыкты түзүшөт, анда алар өз өзүнчө пределге ээ болушпайт, ошондуктан тийиндинин предели жөнүндөгү теореманы дароо эле колдонууга болбойт. Мындай учурда бөлчөктүн касиети боюнча бөлүмүн жана алымын n ге бөлөбүз. Анда бул пределди эсептеп чыгаруунун толук жазылышы төмөндөгүдөй көрсөтүлөт:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{5+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

2-мисал.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{n+4}{n}\right)=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=2\cdot(1+0)=2.$$

3-мисал. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7-n}{n^2+6n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}}{1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0-0}=0.$$

4-мисал.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n-1}{3-n+4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+4\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

5-мисал.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0\cdot e=0.$$

К ө н ү г ү ү л ө р.

54. Пределдер жөнүндөгү теоремалардын жардамы менен төмөндөгүлөрдү далилдегиле:

а) эгерде $a_n=\dfrac{n}{3n-1}$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{3}$;

б) эгерде $b_n=\dfrac{1{,}5n+1}{n}$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1{,}5$;

в) эгерде $x_n = \dfrac{10n}{n-2n^2}$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

г) эгерде $y_n = \dfrac{3-4n^2+n}{5n^2+2n+6}$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -0.8$

55. Пределдер жөнүндөгү теоремалардын жардамы менен төмөндөгүлөрдү эсептегиле:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-4}{1+3n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{2n-5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-9}{3n^2+n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+7}{5n^2-4}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+n-n^2}{4n^2-n+2}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)(n+5)}{n^2+1}$.

56. Пределдерди тапкыла.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+4}{n^2+n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-5}{7n^2-n+3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{2n^2+3}{3n^2-1}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+5n-1}{3n^3-2n^2}+\dfrac{3+5n}{3n-1}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{3n+2}\cdot\dfrac{2n^2}{n^2+n-1}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{5n-1}\cdot\dfrac{2n^2+1}{n^2+2n-1}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$;

III. ФУНКЦИЯНЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ ЖАНА ПРЕДЕЛИ.

3.1. Функциянын үзгүлтүксүздүгү жана үзгүлтүктүүлүгү.

Функциянын үзгүлтүксүздүгү жана үзгүлтүктүүлүгү жөнүндөгү алгачкы маалымат менен силер кээ бир функциялардын графиктерин, чекиттерин үзгүлтүксүз туташтыруу (мисалы: $y = kx+b$, $y=\sin x$ ж.б.) же үзгүлтүктүү туташтыруу (мисалы: $y = tgx$, $y = \{x\}$ ж.б.) менен кагазга чийүүгө боло тургандыгынан таанышсыңар.

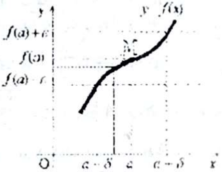
Азыр эми функциянын үзгүлтүксүздүгүнө так математикалык аныктама кандайча берилишине токтололу.

Аныктама. $y=f(x)$ функциясы a чекитинде *үзгүлтүксүз* деп аталат, эгерде төмөндөгү эки шарт аткарылса:

1) функция a чекитинин кандайдыр бир аймагында (чеке-белинде) аныкталса;

2) каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн $|x-a|<\delta$ барабарсыздыгынан $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыга турган $\delta>0$ саны жашаса (б.а. эгерде a санынан x тин мааниси δ дан кичине санга айырмаланса, анда $f(x)$ тин мааниси $f(a)$ дан ε дон кичине санга айырмаланат).

Бул аныктаманын геометриялык мааниде талкууланышына токтололу(10-сүр.). Айталы $M(a; f(a))$ чекити $y=f(x)$ функциясынын графигине тиешелүү чекит болсун дейли. Бул чекитти координата окторуна проекциялоо менен $f(a)$ чекитинин Oy огундагы ε аймагына көңүл буралы. Эгерде $y=f(x)$ функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда Ox огунан a чекитинин δ аймагы табылат да, ал төмөндөгүдөй касиетке ээ болот: биз δ аймагынан кандай гана x чекитин албайлы, Oy огундагы ага туура келген чекит $f(a)$ чекитинин ε аймагына гана таандык болот.



10-сүрөт.

Мисал. $y=f(x)$ функциясы каалаган $x=a$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин далилдегиле, эгерде:

а) $f(x)=C$, $C-const$; б) $f(x)=kx+b$, $k\neq 0$; в) $f(x)=\cos x$.

Далилдөө. а) Аныктаманын экинчи бөлүгү боюнча мынтип жазсак болот: $|f(x)-f(a)|=|C-C|=0$. Бул дегенибиз a чекитинин каалагандай аймагы үчүн $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ дегенди билдирет. Демек, турактуу функция ар кандай чекитте үзгүлтүксүз болот.

б) Графиги түз сызык болгондуктан, геометриялык мааниде сызыктуу функциянын үзгүлтүксүздүгү айкын эле. Бул айтканыбызды тагыраак далилдеп көрсөтөлү.

Каалаган $\varepsilon>0$ санын алып, $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ боло турган $\delta>0$ санын табалы. Алдыдагыга окшош эле төмөндөгүнү жазса болот:

$$|f(x)-f(a)|=|(kx+b)-(ka+b)|=|k|\cdot|x-a|.$$

Бул учурда $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы $|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ барабарсыздыгына тең күчтүү болот, б.а. $|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ дан $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ келип чыгат. Ошентип, эгерде $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ деп алсак, анда $|x-a| < \delta$ барабарсыздыгынан $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыгат. Демек, ар кандай чекитте сызыктуу функция үзгүлтүксүз экендигин билдик.

в) Дагы эле каалаган $\varepsilon > 0$ алып, $|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\cos x - \cos a| < \varepsilon$ боло турган $\delta > 0$ санын табалы. Төмөнкүнү жазсак болот:

$$|\cos x - \cos a| = \left|-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+a}{2}\right| \quad (*)$$

Эми биз, ушул жерде керек боло турган $|\sin x| \le |x|$ барабарсыздыгын далилдеп алалы.

Эгерде $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ болсо, анда $\sin x < x$ (бул кийинчээрек 3.5-п. далилденет, 60-б.кара). $\left]0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ интервалында $|\sin x| = \sin x$, ал эми $|x| = x$. Анда бул учурда $|\sin x| < |x|$ келип чыгат.

Эгерде $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ болсо, анда $0 < -x < \dfrac{\pi}{2}$. Мында дале $\sin(-x) < -x$ же $-\sin x < -x$. Ошондой эле $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ интервалында $\sin x < 0$, $x < 0$ экендиги белгилүү, анда $|\sin x| = -\sin x$, $|x| = -x$. Демек, $|\sin x| < |x|$.

Эгерде $x = 0$ болсо, анда $|\sin x| = |x| = 0$ болоору шексиз.

Акырында $|x| \ge \dfrac{\pi}{2}$ болсун дейли. Анда $|x| > 1$, ал эми $|\sin x| \le 1$ болот. Бул учурда да $|\sin x| < |x|$ келип чыгат.

Бул айтылгандарды жыйынтыктасак, анда $|\sin x| \le |x|$ барабарсыздыгы x өзгөрмөлүүсүнүн каалаган мааниси үчүн туура экендиги келип чыгат.

Эми биз $|\sin x| \le |x|$ барабарсыздыгын (*) барабардыгына пайдалансак, анда $\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right| \le \left|\dfrac{x-a}{2}\right|$. Ошондой эле $\left|\sin\dfrac{x+a}{2}\right| \le 1$ болгондуктан төмөнкүгө ээ болобуз

$$|\cos x - \cos a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+a}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-a|..$$

Ошентип, $|\cos x - \cos a| \le |x-a|..$

Бул барабарсыздыктан, берилген учур үчүн $\delta=\varepsilon$ деп алсак болот. Чындыгында, эгерде $|x-a|<\delta$, б.а. $|x-a|<\varepsilon$ болсо, анда $|\cos x-\cos a|\le|x-a|$ болгондуктан $|\cos x-\cos a|<\varepsilon$ экендигин алабыз. Демек мындан $y=\cos x$ функциясы каалаган a чекитинде үзгүлтүксүз боло тургандыгы далилденди.

Бирок, каалаган чекиттин баарында эле үзгүлтүксүз боло албаган функциялар да көп кездешет. Аларды окуп үйрөнүүдө, алдын чекиттин «көзөнөктүү»(же «оюлган») аймагы деген түшүнүктү киргизишет.

a чекитинин ***δ-көзөнөктүү аймагы*** деп, $]a-\delta,a[$ жана $]a,a+\delta[$ интервалдарынын бирикмесин, б.а. $]a-\delta,a[\cup]a,a+\delta[$ аралыгын айтабыз. Тактап айтканда, бул аймак борбору a чекити *оюлуп* ташталган $]a-\delta,a+\delta[$ интервалы болуп эсептелет.

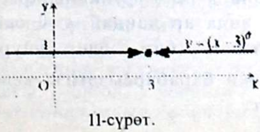
Мейли $y=f(x)$ функциясы a чекитинин кандайдыр бир көзөнөктүү аймагында аныкталган болсун дейли. Эгерде бул функция a чекитинин так өзүндө аныкталбаган болсо же аныкталса дагы ал чекитте үзгүлтүксүз болбосо, анда a чекити $f(x)$ функциясынын ***үзүлүү чекити*** деп аталат.

Маселен, $y=(x-3)^0$ функциясын карайлы. Эгерде $x\neq 3$ болсо, анда $(x-3)^0=1$; эгерде $x=3$ болгондо $(x-3)^0$ туюнтмасы аныкталбайт. Бул функциянын графиги, бир чекити «оюлуп ташталган» абсцисса огуна параллель түз сызык болот (11-сүр.). Үзүлүшкө ээ болгон $x=3$ чекитинен башка бардык чекиттерде берилген функция үзгүлтүксүз. Эгерде $y(3)=1$ деп алсак, анда бардык xтер үчүн аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон жаңы функцияны алган болобуз.

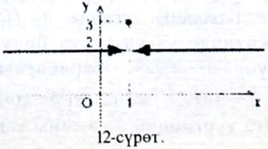
Ошондой эле

$$y=\begin{cases}2, & \text{эгерде} \quad x\neq 1;\\ 3, & \text{эгерде} \quad x=1\end{cases}$$

функциясы да ушундай эле касиетке ээ болот. Бул функциянын графиги 12-сүрөттө көрсөтүлгөн. Берилген функция $x=1$ чекитинде үзүлүшкө учурайт. Бирок функциянын бул чекиттеги маанисин $y(1)=2$ деп өзгөртсөк, анда пайда болгон жаңы функциябыз $x=1$ чекитинде үзгүлтүксүз болуп калат.



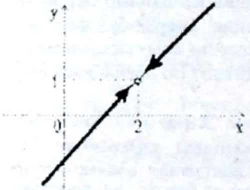
11-сүрөт.



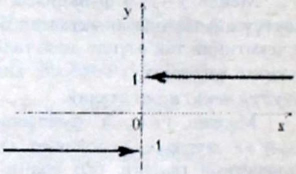
12-сүрөт.

Эгерде $y=f(x)$ функциясы $x\in X$ үчүн a чекитинде үзүлүшкө ээ болсо жана $x=a$ дан башка бардык $x\in X$ үчүн $f(x)$ менен дал келген $F(x)$ функциясы бар болуп, ал a чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $y=f(x)$ функциясы a чекитинде ***жоюлуучу үзүлүшкө*** ээ болот деп айтышат.

Мисалы, $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ функциясын карайлы. Эгерде $x\neq 2$ болсо, анда $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=x-1$. Бул функциянын графиги $x=2$ чекити «оюлуп ташталган» $y=x-1$ түз сызыгы болот (13-сүр.). Бул жерде $x=2$ жоюлуучу үзүлүш чекити, ал эми $y=x-1$ функциясы $x=2$ чекитинен башка бардык чекиттерде берилген функция менен дал келген үзгүлтүксүз функция болот.



13-сүрөт.



14-сүрөт.

Бирок, функциянын үзүлүшүн ар дайым эле жоюуга болот деп эсептөө туура эмес. Маселен, графиги 14-сүрөттө көрсөтүлгөн $y=\dfrac{|x|}{x}$ функциясынын $x=0$ чекитиндеги үзүлүшү жоюлбайт. Ошондой эле мурдатан силерге белгилүү: $y=\dfrac{1}{x+1}$ функциясы $x=-1$ чекитинде жана $y=tgx$ функциясы $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in Z)$ чекиттеринде жоюлбоочу үзүлүшкө ээ болушат ж.б.

Үзгүлтүксүз функциялар үчүн төмөндөгүлөр туура болот.

1-*теорема.* Эгерде $u=f(x)$ жана $v=g(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда ар кандай $\varepsilon>0$ саны үчүн $|x-a|<\delta$ барабарсыздыгынан бир эле учурда $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ жана $|g(x)-g(a)|<\varepsilon$ эки барабарсыздыгы келип чыга тургандай $\delta>0$ саны табылат.

Далилдөө. Шарт боюнча $u=f(x)$ функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан $|x-a|<\delta_1$ барабарсыздыгынан $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыга турган $\delta_1>0$ саны жашайт. Ушуга эле окшош $v=g(x)$ функциясынын a чекитинде үзгүлтүксүз экендигинен $|x-a|<\delta_2$ барабарсыздыгынан $|g(x)-g(a)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыга турган $\delta_2>0$ саны да жашайт.

$\delta=\min(\delta_1;\delta_2)$ болсун (б.а. δ деп, δ_1 жана δ_2 сандарынын эң кичинесин белгилеп алабыз). Мындай болгондо $|x-a|<\delta$ барабарсыздыгынан $|x-a|<\delta_1$ жана $|x-a|<\delta_2$ барабарсыздыктары, ал эми ошол эле учурда булардан $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ жана $|g(x)-g(a)|<\varepsilon$ экендиги келип чыгат.

2-*теорема.* Эгерде $u=f(x)$ жана $v=g(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда $y=f(x)+g(x)$ функциясы дагы a чекитинде үзгүлтүксүз, б.а. *үзгүлтүксүз функциялардын суммасы* да *үзгүлтүксүз* болот.

Далилдөө. Каалагандай $\varepsilon>0$ санын алалы. Алдынкы теореманын негизинде ушундай бир $\delta>0$ саны табылып, $|x-a|<\delta$ болгондо

$$|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{жана} \quad |g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

болот, б.а.

$$|u-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{жана} \quad |v-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Анда $|(u+v)-(f(a)+g(a))|\le|u-f(a)|+|v-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

Ошентип, ар кандай $\varepsilon>0$ саны үчүн $|x-a|<\delta$ барабарсыздыгынан $|(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))|<\varepsilon$ барабарсыздыгы келип чыга турган $\delta>0$ саны жашайт. Мындан $y=f(x)+g(x)$ функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз болот деген тыянакка келебиз.

Эми төмөндө каралуучу теоремалардын далилдөөлөрүнө токтолбойбуз, анткени бул далилдөөлөрдү жүргүзүү процесси бир аз татаалыраак болгондуктан, алар үчүн кийин атайын курстарда кеңири орун берилет.

3-*теорема.* Эгерде $u=f(x)$ жана $v=g(x)$ функциялары a чеки-тинде үзгүлтүксүз болушса, анда $y=f(x)\cdot g(x)$ функциясы дагы ошол чекитте үзгүлтүксүз, б.а. *үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү* да *үзгүлтүксүз* болот.

4-*теорема.* Эгерде $u=f(x)$ жана $v=g(x)$ функциялары a чеки-тинде үзгүлтүксүз жана ошондой эле $g(a)\neq 0$ болсо, анда $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функциясы да ошол эле чекитте үзгүлтүксүз, б.а. *үзгүлтүксүз функциялардын тийиндиси* дагы *үзгүлтүксүз* (албетте бөлүмү нөлдөн айырмалуу чекиттерде гана) болот.

5-*теорема.* Эгерде $v=g(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз, ал эми $f(u)$ функциясы тиешелүү түрдө $u_0=g(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $y=f(g(x))$ татаал функциясы да x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болуп эсептелет.

Бул теоремалардан төмөндөгүдөй ***натыйжалар*** келип чыгат:

1. Эгерде $u=f(x)$ функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз жана C- каалаган бир анык сан болсо, анда $u=Cf(x)$ функциясы дагы a чекитинде үзгүлтүксүз болот.

2. Эгерде $u_1=f_1(x),\quad u_2=f_2(x),\ \ldots,\quad u_n=f_n(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда $y=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)$ (мында $C_1, C_2, \ldots, C_n$- кандайдыр бир анык сандар) функциясы да a чекитинде үзгүлтүксүз болот

3. Эгерде $u=f(x)$ жана $v=g(x)$ функциялары a чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда $y=f(x)-g(x)$ функциясы да ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.

Бул айтылгандардан ар кандай рационалдык, тригонометриялык функциялар жана алардан жаралган татаал функциялар да өздөрү аныкталган аралыктарда үзгүлтүксүз боло тургандыгы келип чыгат.

Көнүгүүлөр.

57. Берилген функциялардын көрсөтүлгөн чекитте үзгүлтүксүз экендигин далилдегиле.

а) $y=2x,\quad x_0=4;$ б) $y=5-3x,\quad x_0=1\dfrac{2}{3};$

в) $y=x^2-3, x_0=-1;$ г) $y=7+x-2x^2,\quad x_0=1;$

д) $y=\dfrac{2x}{x+1},\quad x_0=-2;$ е) $y=\dfrac{6x+1}{3-x},\quad x_0=-3;$

ж) $y=\sin x,\quad x_0=0;$ з) $y=\cos 2x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{6};$

и) $y=\dfrac{x^2+3}{x-1},\quad x_0=2;$ к) $y=\dfrac{3x^2-2}{2x^2+7};\quad x_0=3.$

58. Төмөнкү функциялардын үзүлүү чекиттерин аныктагыла:

а) $y=\frac{6}{1-x}$; б) $y=\frac{x}{x+2}$; в) $y=\frac{5x-9}{8}$;

г) $y=\frac{3x+4}{4-3x}$; д) $y=\frac{x+3}{x^2+9}$; е) $y=\frac{x-4}{x^2-16}$;

ж) $y=\frac{10+2x}{x^2-25}$; з) $y=ctg\,x$; и) $y=\frac{x+1}{\cos x}$;

59. Берилген функциялардын кайсынысынын үзгүлтүктүүлүгү жоюлат же жоюлбайт:

а) $f(x)=\frac{x^2-3x}{2x}$; б) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$;

в) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$; г) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$;

д) $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x-2{,}5}$; е) $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{2x+10}$;

ж) $f(x)=\frac{x+7}{x^2+10x+21}$; з) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$.

60. Сан огунун төмөндөгү берилген чекиттерден башка бардык чекиттеринде аныкталып жана үзгүлтүксүз болгон функцияга мисалдар келтиргиле (функцияны формуланын жардамы менен же графиги боюнча көрсөткүлө):

а) $x=-0{,}5$; б) $x=0$ жана $x=2$; в) $x=\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$.

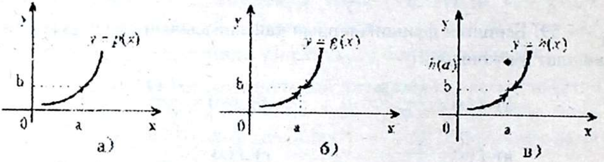
61. Төмөндөгү функциялардын кандай үзүлүшкө ээ экендигин аныктагыла:

а) $y=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x+1}, & \text{эгерде } x\neq-1,\\ -3, & \text{эгерде } x=-1;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\frac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{эгерде } x\neq 2;\\ 1, & \text{эгерде } x=2.\end{cases}$

62. Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болуп, ал эми $g(x)$ функциясы x_0 чекитинде жана анын кандайдыр бир аймагында аныкталып, бирок анын өзүндө үзгүлтүктүү болсо, анда $f(x)+g(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болобу?

3.2. Функциянын пределинин аныктамасы.

Графиктери 15-а-в сүрөттө көрсөтүлгөн $y = p(x)$, $y = g(x)$ жана $y = h(x)$ функцияларын карайлы. Булар ар түрдүү функциялар, анткени алар бири-биринен $x=a$ чекитиндеги өзгөчөлүктөрү менен айырмаланышат. Тактап айтканда, a чекитинде $p(x)$ функциясы үзгүлтүксүз, ал эми калган экөө ал чекитте үзгүлтүктүү. Ошондой эле сүрөттөн a чекитинде $g(x)$ функциясынын аныкталбагандыгы, ал эми



15-сүрөт.

$h(x)$ функциясынын аныкталгандыгы көрүнүп турат. Мындан дагы эгерде $x \neq a$ болсо, анда $p(x) = g(x) = h(x)$ боло тургандыгын көрөбүз. Ошентип, бардык үч учурда тең x канчалык aга жакын болгон сайын $p(x)$, $g(x)$ жана $h(x)$ функцияларынын маанилери b санынан ошончолук аз айырмаланганын байкоого болот. Бул айырмачылык тиешелүү түрдө $|p(x) - b|$, $|g(x) - b|$, $|h(x) - b|$ туюнтмалары менен мүнөздөлүп көрсөтүлөт. Мындай учурда x саны a га умтулганда (б.а. $x \to a$) каралып жаткан функциялардын ар биринин предели b га барабар деп айтышат жана төмөндөгүдөй жазышат:

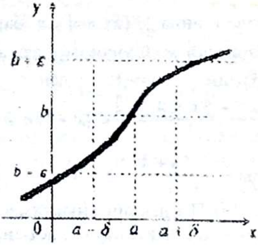
$$\lim_{x \to a} p(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{x \to a} h(x) = b$$

Функциянын пределинин так аныктамасы төмөндөгүдөй айтылат.

Аныктама. Каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн $|x - a| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандыруучу бардык $x \neq a$ чекиттеринде $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла турган $\delta > 0$ саны табылса, анда b ***саны*** $f(x)$ ***функциясынын*** $x \to a$ ***умтулгандагы*** (же a ***чекитиндеги***) ***предели*** деп аталат жана $\lim_{x \to a} f(x) = b$ көрүнүшүндө жазылат.

Бул айтылган аныктама мындайча сүрөттөлүп түшүндүрүлөт (16-сүр.). Каалаган бир $\varepsilon > 0$ санын алып, Oy огунан b чекитинин ε аймагын белгилейбиз жана $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ интервалынын учтарынан

Ox огуна параллель түз сызыктарды жүргүзөбүз. Анда туурасы 2ε болгон тилкени алабыз. Эгерде каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн ушундай бир $\delta > 0$ санын көрсөтүүгө мүмкүн болуп, a чекитинин δ аймагынан алынган жана a га барабар болбогон xтер үчүн $f(x)$ функциясынын графиги толук бойдон көрсөтүлгөн тилкеге таандык болсо, анда b саны $f(x)$ функциясынын $x \to a$ умтулгандагы предели экендигин билдирет.



16-сүрөт.

Ошондой эле графиги 15,а сүрөттө көрсөтүлгөн $y = p(x)$ үзгүлтүксүз функциясы үчүн $p(a) = b$ барабардыгы аткарылгандыктан, $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ экендигин байкайбыз.

Демек, ар кандай $f(x)$ *үзгүлтүксүз функциясынын* $x \to a$ *умтулгандагы предели, ал функциянын ошол чекиттеги маанисине барабар,* б.а. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ болот.

Мисалдар. Төмөндөгүлөрдү далилдегиле:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(5x - 3) = 7$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = 3$; в) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$.

Далилдөө. а) $f(x) = 5x - 3$ функциясы $x = 2$ чекитинин каалаган аймагында аныкталган. Анда $|f(x) - 7| < \varepsilon$ б.а.

$|(5x - 3) - 7| = |5x - 10| = 5|x - 2| < \varepsilon$ барабарсыздыгы $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

шартын канааттандырган бардык xтер үчүн аткарылат. Ошентип бул учурда $\varepsilon > 0$ үчүн $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ деп алсак, анда $|x - 2| < \delta$ барабарсыздыгы аткарыла турган бардык xтер үчүн $|f(x) - 7| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын чындык экендиги анык. Мындан төмөндөгү келип чыгат:

$$\lim_{x \to 2}(5x - 3) = 7, \text{ т.к.д.}$$

б) Бул учурда -1ге барабар болбогон бардык xтер үчүн

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 4)}{x + 1} = x + 4.$$

Мындан $|f(x) - 3| = |x + 4 - 3| = |x + 1|$. Эгерде $|x + 1| < \varepsilon$ жана $x \neq -1$

болсо, анда $|f(x)-3|<\varepsilon$ барабарсыздыгы туура болот. Ошентип, каалаган $\varepsilon>0$ үчүн $\delta=\varepsilon$ деп алсак, анда $|x-(-1)|<\delta$ туура боло турган $x=-1$ ден башка бардык xтер үчүн $\left|\frac{x^2+5x+4}{x+1}-3\right|=|x+1|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат, б.а. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=3$. Т.к.д

в) Пределдин аныктамасынын негизинде жана берилген функциянын аныкталуу областын эске алуу менен төмөнкүнү алабыз:

$$|f(x)-b|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Мындан каалаган $\varepsilon>0$ үчүн $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$ болгондо $|x-a|<\delta$ шартын канааттандыруучу бардык xтер үчүн $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ барабарсыздыгы туура болот, б.а.

$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ келип чыгат, т.к.д.

Көнүгүүлөр

63. Функциянын пределинин аныктамасын пайдаланып төмөнкү барабардыктарды далилдегиле:

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$; б) $\lim\limits_{x\to 5}(4x-9)=11$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{3}{x}=-1$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{3+x}=0$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{4x}=\frac{1}{4}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=-5$.

3.3. Функциянын предели жөнүндөгү теоремалар.

Эгерде функциянын предели бар болсо, анда алардын саны канча жана аларды табуу үчүн эсептөөнү кантип жеңил жүргүзүүгө болот деген суроолорго төмөндөгү теоремалар жооп берет.

1-*теорема*. Эгерде $f(x)$ функциясынын $x\to a$ умтулгандагы предели бар болсо, анда ал предел *бирөө* гана болот.

Далилдөө. Айталы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ жана $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$ болсун дейли.

Анда каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн $|x-a|<\delta$ барабарсыздыгын канааттандыруучу бардык $x\neq a$ үчүн $\delta>0$ саны табылат жана төмөндөгү эки барабарсыздык тең аткарылат:

$$|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{жана}\quad |f(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Бул учурда

$$|b-c| = |(b-f(x)) + (f(x)-c)| \le |b-f(x)| + |f(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

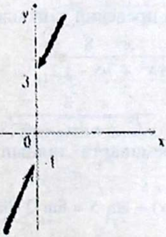
анда $|b-c| \ge 0$ саны каалагандай оң сандан кичине болот. Мындай сан нөл гана болушу мүмкүн. Демек $|b-c| = 0$, б.а. $b=c$. Т.к.д.

Ошентип, көрсөтүлгөн чекитте берилген функциянын бирден көп эмес предели болушу мүмкүн. Бирок, кээде $f(x)$ функциясы бардык жерде аныкталса дагы, берилген x_0 чекитинде предели такыр болбой калышы да мүмкүн. Мисалы,

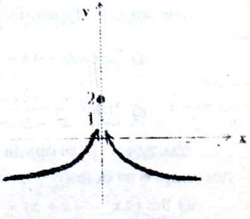
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{эгерде} \quad x<0; \\ 0, & \text{эгерде} \quad x=0; \\ 2x+3, & \text{эгерде} \quad x>0. \end{cases}$$

функциясын карайлы. Бул функциянын графиги 17-сүрөттө көрсөтүлгөн. Качан аргумент x тин. маанилери терс болуу менен 0гө жакындаган сайын, функциянын тиешелүү маанилери -1ге умтулат. Качан аргумент x тин маанилери оң болуу менен 0гө жакындаса функциянын тиешелүү маанилери 3кө умтулат. Ал эми $x=0$ чекитинин өзүндө функция 0гө айланат. Мындай учурда x тин 0гө жакындашынан функциянын бардык маанилери умтула турган кандайдыр бир санды көрсөтүү мүмкүн эмес. Мындан берилген функциянын $x \to 0$ умтулгандагы предели жок экендигин көрөбүз.

Ошондой эле $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ пределинин жашашы, ал пределдин $f(x)$ функциясынын $x=a$ чекитиндеги маанисине ар дайым эле барабар дегенди билдирбейт. Мисал катары, графиги 18-сүрөттө көрсөтүлгөн функцияны карасак болот. График боюнча $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ предели жашайт жана 1ге барабар, бирок $x=0$ чекитинин өзүндө функциянын мааниси 2ге барабар экендигин көрүп турабыз. Бул учурда $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ne f(0)$.



17-сүрөт



18-сүрөт

Эми биз предели жашаган функциялар боюнча төмөнкү теоремаларга токтололу (далилдөөсүн бул жерде карап олтурбайбыз, анткени алар алды жакта карап өткөн үзгүлтүксүздүк теоремалары сыяктуу эле далилденет).

2-*теорема.* Эгерде $C - const$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a} C = C$ болот, б.а. туруктуу чоңдуктун предели өзүнө барабар.

3-*теорема.* Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ жана $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = b + c$ болот, б.а. функциялардын суммасынын предели, ал функциялардын пределдеринин суммасына барабар.

4-*теорема.* Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ жана $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\cdot c$ болот, б.а. функциялардын көбөйтүндүсүнүн предели, ал функциялардын пределдеринин көбөйтүндүсүнө барабар.

5-*теорема.* Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ жана $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ $(c \neq 0)$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$ болот, б.а эки функциянын катышынын предели, качан бөлүүчүнүн предели нөл эмес болгондо гана, ал функциялардын пределдеринин катышына барабар

6-*теорема* (*аралыктагы функциянын предели жөнүндө*). Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ болуп жана a чекитинин кандайдыр бир оюлган аймагында $f(x) \le g(x) \le h(x)$ барабарсыздыгы орун алса, анда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ болот.

Мисалдар. Төмөнкү функциялардын пределин тапкыла:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3 - 4x + 5)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 8}{4x^2 + 7x - 12}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x^2 + 21x + 22}{x^2 - 5x - 14}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{2x + 10} - 4}$.

Чыгаруу. Жогоруда айтылган теоремаларга таянып төмөндөгүлөргө ээ болобуз:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3 - 4x + 5) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^3) - \lim\limits_{x\to 1}(4x) + \lim\limits_{x\to 1} 5 = \lim\limits_{x\to 1} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x^3 -$

$$- \lim_{x\to 1} 4 \cdot \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 5 = 2\cdot 1^3 - 4\cdot 1 + 5 = 3.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-8}{4x^2+7x-12}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}8}{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2)+\lim\limits_{x\to 0}(7x)-\lim\limits_{x\to 0}12}=$

$$=\frac{0-8}{4\cdot 0+7\cdot 0-12}=\frac{2}{3}.$$

в) Бул мисалды чыгарууда алды жактагы мисалдардай кириш-сек, анда $\frac{0}{0}$ аныксыздыгы пайда болот. Ошондуктан алгач мындай өзгөртүп түзүүнү жүргүзүп алабыз:

$$\frac{5x^2+21x+22}{x^2-5x-14}=\frac{(5x+11)(x+2)}{(x+2)(x-7)}=\frac{5x+11}{x-7}.$$

Анда $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+21x+22}{x^2-5x-14}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x+11}{x-7}=\dfrac{5(-2)+11}{-2-7}=-\dfrac{1}{9}.$

г) Мында дагы алгач төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүнү пайдаланабыз:

$$\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}=\frac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{2x+10-16}=\frac{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)}{2(x-3)}=\frac{\sqrt{2x+10}+4}{2}.$$

Анда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+10}+4}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 3+10}+4}{2}=4.$$

Көнүгүүлөр.

64. Пайдалануучу теоремаларды көрсөтүү менен функциянын пределин тапкыла.

а) $\lim\limits_{x\to -1}(4x^2-7x+9)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x^2-3x-4)$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-6x-7}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x^3+x^2-2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-5}{6-x}$; е) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$.

65. Пределди тапкыла.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{6+2x-4x^2}{2x^2-5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;

д) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1 - \sqrt{x+3}}{2 + x}$; е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4} - 2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1}$; з) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$;

и) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x}$; к) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x + \sin^2 2x}{1 - \cos 2x}$.

3.4. Функциянын предели боюнча кошумча түшүнүктөр.

Азыр биз $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ функциясын карап көрөлү. Муну төмөндөгүдөй түрдө жазып алсак болот:

$$y = 3 - \frac{5}{x+1}.$$

Мындан xтин мааниси өскөн сайын $\dfrac{5}{x+1}$ бөлчөгүнүн бөлүмү чоңоё баштаганын, ал эми бөлчөктүн өзүнүн мааниси болсо каалаганчалык кичирейгенин көрүүгө болот. Ошентип, xтин мааниси мүмкүн болушунча чоңойгондо берилген функциянын мааниси 3 санынан өтө эле аз айырмаланганы келип чыгат. Бул учурда x плюс чексизге умтулганда, берилген функция 3кө умтулат деп айтышат жана $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = 3$ деп жазышат.

Жалпысынан айтканда, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ деген жазуу мындайча түшүндүрүлөт: *ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн ушундай бир p саны табылып, $x > p$ болгондо $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат*, б.а. эгерде $x > p$ болсо, анда $y = f(x)$ функциясынын маанисинин b санынан айырмачылыгы ε дон кичине болот. Демек, ***b саны $y = f(x)$ функциясынын $x \to +\infty$ умтулгандагы предели деп аталат.***

«$x \to +\infty$ умтулгандагы $y = f(x)$ функциясынын предели» жана «$n \to \infty$ умтулгандагы (x_n) удаалаштыгынын предели» - деген түшүнүктөр дээрлик окшош эле. Болгон айырмачылыгы - (x_n) удаалаштыгы үчүн $|x_n - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы n дин натуралдык мааниси n_0 натуралдык санынан чоң болгондо гана аткарылса, $y = f(x)$ функциясы үчүн $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы p анык санынан чоң болгон xтин бардык анык маанилери үчүн аткарылат. Бул окшоштуктан, удаалаштык - функциянын айрым бир учуру экендигин билдирет, б.а. натуралдык сандардын көптүгүндө берилген функцияны удаалаштык деп айтабыз (16-б. кара).

Ошондой эле $x \to +\infty$ умтулгандагы функциянын пределин кароо менен бир катар xтин минус чексизге умтулгандагы предели дагы каралышы мүмкүн, б.а. *эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн ушундай p саны табылып $x < p$ болгондо $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда b* ***саны*** *$y = f(x)$* ***функциясынын*** *$x \to -\infty$* ***умтулгандагы предели*** деп аталат жана $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ көрүнүшүндө жазылат.

Эскертүү. xтин $+\infty$ге же $-\infty$ге умтулгандагы функциянын пределдери үчүн да удаалаштыктын пределдери жөнүндөгү теоремалар туура болуп эсептелет.

Мисалы, $f(x) = \dfrac{3x}{|x|+1}$ функциясынын $x \to +\infty$ жана $x \to -\infty$ге умтулгандагы пределдерин таап көрөлү.

Чыгаруу. Эгерде $x > 0$ болсо, анда $\dfrac{3x}{|x|+1} = \dfrac{3x}{x+1}$ Бул учурда

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{3x}{|x|+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + \dfrac{1}{x}} = 3.$$

Ал эми $x < 0$ болсо, анда $\dfrac{3x}{|x|+1} = \dfrac{3x}{1-x}$. Мындай болгондо

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{3x}{|x|+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{1-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\dfrac{1}{x} - 1} = -3.$$

Эгерде каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн ушундай бир $\delta > 0$ саны табылып $a < x < a + \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган, б.а. a чекитинин оң жагындагы δ-аймакта жаткан бардык xтер $(x \in]a; a + \delta[)$ үчүн $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда b саны $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги ***оң жактык предели*** деп аталат жана төмөндөгүдөй жазылат:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b$$

Сол жактык пределдин аныктамасы да ушуга окшош эле мындайча айтылат: эгерде $\varepsilon > 0$ саны үчүн ушундай бир $\delta > 0$ саны табылып $a - \delta < x < a$ барабарсыздыгын канааттандырган, б.а. a чекитинин сол жагындагы δ-аймакта жаткан бардык xтер $(x \in]a - \delta, a[)$ үчүн $|f(x) - b| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда

b саны $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги ***сол жактык предели*** деп аталат жана төмөндөгүдөй жазылат:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b.$$

Эгерде a чекитинин кандайдыр бир оң жагындагы аймакта $f(x)>0$ жана $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ болсо, анда *a чекитине x оң жактан умтулганда $f(x)$ функциясы плюс чексизге умтулат* деп айтышат жана мынтип жазышат:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty.$$

Ал эми эгерде a чекитинин кандайдыр бир оң жагындагы аймакта $f(x)<0$ жана $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ болсо, анда *a чекитине x оң жактан умтулганда $f(x)$ функциясы минус чексизге умтулат* деп айтышат жана мынтип жазышат:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty.$$

Мисалы, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ функциясын карайлы. Бул функция $x>1$ болгондо аныкталган жана мааниси нөлдөн чоң. Анда

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{x-1} = 0 \text{ болгондуктан } \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty.$$

Ошондой эле $f(x)$ функциясы үчүн a чекитинин сол жагындагы чексиз пределдер, б.а. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ түшүнүктөрү алды жактагы аныктамаларга окшош эле аныкталат.

xтин $+\infty$ге же $-\infty$ге умтулган учурундагы *чексиз пределдерге* мындай аныктама беришет.

Эгерде каалаган $c>0$ саны үчүн ушундай бир $h>0$ саны табылып $x>h \Rightarrow f(x)>c$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ал эми $x>h \Rightarrow f(x)<-c$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ деп аталат.

$x\to-\infty$ умтулгандагы чексиз пределдин аныктамасы алдыда каралганга окшош эле берилет. Бул айтылгандарга карата төмөндөгү мисалдарды келтирсек болот (түшүндүрмөсү кыйын эмес):

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+16) = +\infty$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-0.8) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5-x^2}{x+1}=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-5-x^2}{x+1}=+\infty$.

Чексиз пределдер түшүнүгү, функцияларды изилдөөдө жана алардын графиктерин чийүүдө кеңири пайдаланылат. Айрыкча, *горизонталдык, вертикалдык* жана *жантык асимптоталарды* табууда чоң ролду ойнойт.

Эгерде $x\to+\infty$ (же $x\to-\infty$) *умтулганда бир эле абсциссага ээ болгон графиктин чекити менен түз сызыктын чекитинин арасындагы аралык нөлгө умтулса*, б.а.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0 \text{ (же } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0\text{)}$$

болсо, анда $y=kx+b$ *түз сызыгы* $y=f(x)$ *функциясынын графигинин* $x\to+\infty$ (же $x\to-\infty$) *умтулгандагы* ***асимптотасы*** деп аталат.

Алгач вертикалдык асимптота жөнүндө токтололу. Мейли $f(x)$ функциясы кандайдыр бир a чекитинин оюлган аймагында аныкталган болсун дейли.

Эгерде $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ болсо, анда $x=a$ *түз сызыгы* $f(x)$ функциясынын графигинин ***вертикалык асимптотасы*** деп аталат.

Эскертүү. Вертикалдык асимптотанын функциянын графигине карата оң (же сол) жакта жайгашышы $x\to a+0$ (же $x\to a-0$) умтулганына жараша болот.

Эми $y=kx+b$ түз сызыгы $f(x)$ функциясынын графигинин $x\to+\infty$ умтулгандагы асимптотасы болсун дейли. Айталы

$$A(x)=f(x)-kx-b \tag{1}$$

функциясын карайлы. Асимптотанын аныктамасын эске алсак, анда

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=0.$$

(1) боюнча $b=f(x)-kx-A(x)$ болгондуктан,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) \tag{2}$$

Ошондой эле (1)ден

$$k=\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{A(x)}{x} \text{ болгондуктан,}$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3}$$

Жыйынтыктап айтканда, эгерде (2) жана (3) пределдери жашаса, анда $y=kx+b$ түз сызыгы $f(x)$ функциясынын графигинин $x\to+\infty$ умтулгандагы асимптотасы болоору келип чыгат (ал эми $x\to-\infty$ умтулгандагы асимптотанын жашашы жогоруда айтылгандарга окшош эле аныкталат).

Ошентип, эгерде $k \neq 0$ болсо, анда $y = kx + b$ *түз сызыгы жантык асимптота*, ал эми $k = 0$ болгондо $y = b$ *түз сызыгы горизонталдык асимптота* деп аталат.

Мисалдар. 1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x+1| - 1}$ функциясынын $x = -1$ чекитинин оң жана сол жагындагы пределдерин тапкыла.

Чыгаруу. Эгерде $x > -1$ болсо, анда $|x+1| = x + 1$ жана

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x+1| - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Бул учурда

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{2} \text{ болот.}$$

Ал эми эгерде $x < -1$ болсо, анда $|x+1| = -(x+1)$ жана

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x+1| - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Мындан $x < -1$ болгондо $f(x) > 0$ жана

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x-1} = 0,$$

ошондуктан

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = +\infty.$$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ функциясынын графигинин мүмкүн болгон бардык асимптоталарын тапкыла.

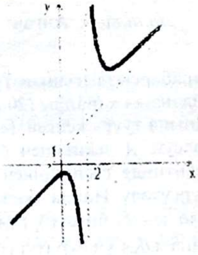
Чыгаруу. Берилген бул функциянын графигинин вертикалдык асимптотасы бар жана ал $x = 2$ түз сызыгы болуп эсептелет, себеби $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$ болот. (3) формуланы жана пределдер жөнүндөгү теореманы эске алсак, анда

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x(x-2)} = 1.$$

Ал эми (2) формуланын негизинде

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Бул учурда $y=x+1$ түз сызыгы функциянын графигинин $x\to+\infty$ умтулгандагы жантык асимптотасы болот. Ошондой эле $x\to-\infty$ умтулгандагы бул функциянын графигинин жантык асимптотасы дале $y=x+1$ түз сызыгы болоорун оңой эле текшерүүгө болот. $k\neq 0$ болгондуктан, каралып жаткан функциянын графигинин горизонталдык асимптотасы жок(19-сүр.).



19-сүрөт.

Жыйынтыктап айтканда берилген функциянын графигинин $x\to\pm\infty$ умтулганда эки гана, б.а. $x=2$ - вертикалдык жана $y=x+1$ - жантык асимптоталары бар экендигин аныктадык.

Көнүгүүлөр

66. Пределди тапкыла.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{5x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x-x^2}{x+2}$.

67. Төмөнкү функциялардын x_0 чекитинин оң жана сол жагындагы пределдерин тапкыла.

а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x_0=-1$; б) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{x^2+x}$, $x_0=0$; г) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2|x-1|-1}$, $x_0=1$;

д) $f(x)=\dfrac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$, $x_0=1$; е) $f(x)=\dfrac{x^2+|x|+x}{x^2-|x|+3x}$, $x_0=0$;

68. Төмөнкү функциялардын графиктеринин асимптоталарын тапкыла.

а) $f(x)=\dfrac{3}{x}$; б) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; в) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$;

г) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$; д) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$; е) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

3.5. Эң сонун пределдер.

Азыр биз төмөнкү теоремаларга токтолуп көрөлү.

1-*теорема*.

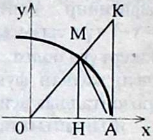
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ болот.}$$

Бул пределди ***биринчи сонун предел*** деп атоо кабыл алынган.

Далилдөө. Алгач $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо

$$\sin x < x < tg x \qquad (1)$$

барабарсыздыгынын туура экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн бирдик айлананы карайлы (20-сүр.). Мейли M - жаасы x санына туура келген бирдик айлананын чекити болсун. A чекитинен OM шооласы менен K чекитинде кесилишкен AK перпендикулярын жүргүзөлү. Пайда болгон OMA үч бурчтугун (аянты - S_1 болсун), OMA секторун(аянты - S_2) жана OKA үч бурчтугун (аянты - S_3) аянттары боюнча салыштырсак, анда



20-сүрөт.

$$S_1 < S_2 < S_3 \qquad (2)$$

экендиги көрүнүп турат.

Эми биз 20-сүрөт боюнча төмөнкүлөрдү эсептеп чыгаралы.

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x, \qquad S_2 = \frac{1}{2} OA^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tg x = \frac{1}{2} tg x.$$

Бул алынган жыйынтыктар үчүн (2) барабарсыздыкты пайдалансак, анда

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tg x \quad \Rightarrow \sin x < x < tg x.$$

Ал эми эгерде $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ болсо, анда $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ болот. Мындай болгондо (1) барабарсыздык $\sin(-x) < -x < tg(-x)$ көрүнүшүнө келет. Бул кош барабарсыздыктын эки жагын (-1)ге көбөйтүп төмөнкүгө ээ болобуз

$$tg x < x < \sin x. \qquad (3)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $\sin x > 0$ экендигин эске алуу менен (1) кош барабарсыздыгынын бардык жагын мүчөлөп $\sin x$ ке бөлсөк, анда

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (4)$$

Ушундай эле $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ болгондо $\sin x < 0$ экендигин эске алуу менен (3) кош барабарсыздыгынын да бардык жагын $\sin x$ ке бөлсөк, анда

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1,$$

б.а. алдыдагы эле (4) кош барабарсыздыгын алабыз.

Ошентип, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ интервалына камтылган $x=0$ чекитинин оюлган аймагы үчүн дагы (4) кош барабарсыздыгы орун алат. Анда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$y = \cos x$ функциясы бардык аралыкта үзгүлтүксүз болгондуктан, $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$ жана турактуу функциянын предели ошол турактуунун маанисине барабар болгондуктан $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ болот. Анда 3.3-п, 6-теореманын (52-б. кара) негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \text{ т.к.д.}$$

Көпчүлүк учурда бул барабардыктын төмөнкүдөй жалпыланган жазылышы пайдаланылат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1, \text{ мында } k \neq 0.$$

Мисалдар. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{5x}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\sin 7x}{5\cdot 7x} = \frac{7}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{5}\cdot 1 = \frac{7}{5}.$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{tq\,3x}{\sin x}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. Алгач мындай өзгөртүп түзүүнү жүргүзүп алалы:

$$\frac{tq\,3x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{3x}{\sin x\cdot 3x} = \frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Анда пределдер жөнүндөгү теоремаларды эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tq\,3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1\cdot 3\cdot 1 = 3.$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 5x\cdot\sin x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-10\cdot\frac{\sin 5x\cdot\sin x}{5x^2}\right)=-10\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-10\cdot 1\cdot 1=-10.$$

2-*теорема.*

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e \text{ болот.}$$

Бул пределди ***экинчи сонун предел*** деп аташат.

Эгерде $u=\dfrac{1}{x}$ десек, анда $x\to\infty$ умтулганда $u\to 0$ умтулганын көрөбүз. Мындай болгон учурда

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ келип чыгат.}$$

Эми биз мурдагы алды жакта карап өткөн (3.4-п.54б.) $f(x)$ функциясынын $x\to+\infty$ умтулгандагы предели менен (x_n) удаалаштыгынын $n\to\infty$ умтулгандагы пределинин дал келишин жана 2.7-пункттагы $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ барабардыгын (38-б.) эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Мисалдар. Төмөндөгү пределдерди тапкыла.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{5}{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1}$.

Чыгаруу. 1) Бул мисалды чыгарууда ордуна коюу жолун пайдаланабыз, б.а. $u=2x$ деп белгилөө жүргүзсөк, анда $x=\dfrac{u}{2}$ жана $x\to 0\Rightarrow u\to 0$ экендиги келип чыгат. Мындай болгондо төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}}=\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^2=e^2.$$

2) Алдыңкыдай эле жол менен төмөнкүлөрдү жазып алсак болот: эгерде $-\dfrac{x}{4}=u$ деп белгилесек, анда $x=-4u$ жана $x\to 0\Rightarrow u\to 0$.

Мындан $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{\frac{5}{x}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{5}{4u}} = \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-\frac{5}{4}} = e^{-\frac{5}{4}}$.

3) Алдын мындай өзгөртүп түзүү жүргүзүп алалы:

$\frac{3x-2}{3x+1} = 1-\frac{3}{3x+1}$, эгерде $-\frac{3}{3x+1} = u$ деп белгилесек, анда $x = -\frac{1}{3}-\frac{1}{u}$, ал эми $2x+1 = \frac{1}{3}-\frac{2}{u}$ болот жана $x\to\infty \Rightarrow u\to 0$ Мындай болгон учурда төмөнкүнү алабыз

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{3}-\frac{2}{u}} = \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-2} =$$

$$= 1\cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Көнүгүүлөр.

69. Берилген $f(x)$ функциясынын $x\to x_0$ умтулгандагы пределин тапкыла.

а) $f(x+\Delta x)=C$. б) $f(x)=\frac{\sin 5x}{6x}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$, $x_0=\frac{\pi}{3}$; г) $f(x)=\frac{tqx}{x}$, $x_0=0$;

70. Төмөнкү пределдерди эсептегиле.

а) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin\frac{x}{2}}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 4x}{x}$; в) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\frac{x}{4}}$; д) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 9x-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(tqx+tq2x)}{6x}$;

ж) $\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{\sec x-1}$; з) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{x^2}$;

71. (x_n) удаалаштыгынын $n\to\infty$ умтулгандагы пределин тапкыла:

а) $x_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; б) $x_n=\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$; в) $x_n=\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$; г) $x_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$.

72. Төмөнкү пределдерди эсептегиле.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+3}\right)^{x+2}$;

IV. ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

4.1. Аргументтин жана функциянын өсүндүсү.

Айталы $y=f(x)$ функциясы x_0 жана x чекиттеринде аныкталган болсун дейли. Бул учурда $x-x_0$ айырмасы ***аргументтин өсүндүсү*** деп аталат жана Δx деп белгиленет, б.а. $\Delta x=x-x_0$. Ал эми $f(x)-f(x_0)$ айырмасы ***функциянын өсүндүсү*** деп аталат жана Δf же Δy деп белгиленет, б.а.

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Айталы $y=x^2$ функциянын x чекитинен $x+\Delta x$ чекитине өткөндөгү өсүндүсүн таап көрөлү.

Чыгаруу. Шарт боюнча $f(x)=x^2$ болгондуктан $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$ болот. Анда

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=$$
$$=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2=(2x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Мындагы Δxтин модулу кичирейген сайын анын квадраты андан да бир кыйла кичирейген болот. Ошондуктан $2x\cdot\Delta x$ ти берилген функциянын өсүндүсүнүн *башкы бөлүгү* деп аташат.

Алынган $\Delta f=(2x+\Delta x)\cdot\Delta x$ формуласы боюнча x жана Δxке каалаган маанилерди берүү менен Δf тин ар кандай маанисин эсептеп чыгарууга болот. Мисалы $x=3$, $\Delta x=0{,}1$ болсун десек, анда

$$\Delta f=f(3{,}1)-f(3)=(2\cdot 3+0{,}1)\cdot 0{,}1=0{,}61;$$

ал эми эгерде $x=1{,}4$ жана $\Delta x=-0{,}02$ болсо, анда

$$\Delta f=f(1{,}38)-f(1{,}4)=(2\cdot 1{,}4-0{,}02)\cdot(-0{,}02)=-0{,}0556\ \text{ж.б.}$$

Ошондой эле өсүндү түшүнүгүн функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн аныктоого да пайдаланса болот.

Теорема. Эгерде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ (мында $\Delta x = x - a$ жана $\Delta f = f(x) - f(a)$. болсо, анда $y = f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Далилдөө. Чынында эле $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(a)$ болсо, анда $y = f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде үзгүлтүксүз болоорун көргөнбүз (49-б.), б.а. $\lim\limits_{(x-a) \to 0} (f(x) - f(a)) = 0$. Мындан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ экендиги келип чыгат.

К ө н ү г ү ү л ө р.

73. а) $y = 3 - x$; б) $y = 2x + 7$ функциялары үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:

1) эгерде $x_0 = 2$ жана $\Delta x = 0{,}2$ болсо, x ти;
2) эгерде $x_0 = 5$ жана $\Delta x = 0{,}01$ болсо, x ти;
3) эгерде $x_0 = 4$ жана $\Delta x = 0{,}1$ болсо, Δy ти;
4) эгерде $x_0 = 5$ жана $\Delta x = 0{,}01$ болсо, Δy ти;
5) эгерде $x = 1{,}3$ жана $x_0 = 1$ болсо, Δx жана Δy ти;
6) эгерде $x = 3{,}9$ жана $x_0 = 3{,}75$ болсо, Δx жана Δy ти;

74. Төмөндөгү функциялар үчүн x чекитиндеги аргументтин Δx өсүндүсүнө туура келген функциянын өсүндүсүн жазгыла:

а) $y = 4x$; б) $y = 5 - \frac{1}{2}x$; в) $y = \frac{3}{1-3x}$; г) $y = \frac{5x-2}{x+3}$;

д) $y = x^2$; е) $y = 3x - x^2$ ж) $y = 2\sqrt{x-2}$.

75. Эгерде:

а) $f(x) = kx + b$; б) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = ax^2 + bx + c$; г) $f(x) = x^3$

болгондо,

$$f(x+h), \quad f(x+h) - f(x), \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ - тапкыла.

76. $f(x) = kx + b$ функциясы үчүн $\frac{\Delta f}{\Delta x} = k$ экендигин далилдегиле.

77. Төмөнкү функциялардын өсүндүсүнүн башкы бөлүгүн тапкыла:

а) $f(x) = 7 - 4x$; б) $f(x) = 2x^2 - 5$;

в) $f(x) = x^2 - 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 - 2x$.

4.2. Функциянын туундусунун аныктамасы.

Аныктама. *$y=f(x)$ функциясынын бекемделген x чекитиндеги Δf өсүндүсүнүн Δx өсүндүсүнө болгон катышынын $\Delta x \to 0$ умтулгандагы предели жашаса, анда $f(x)$ функциясы x* ***чекитинде дифференцирленүүчү*** *деп, ал эми ошол* ***предел*** *x* ***чекитиндеги $y=f(x)$ функциясынын туундусунун мааниси*** *деп аталат жана $f'(x)$ же y', y'_x деп белгиленет, б.а.*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Мындагы $f'(x)$ - көрсөтүлгөн предел жашаган бардык x чекиттеринде аныкталган жаңы функция болуп эсептелет жана аны $f(x)$ ***функциясынын туундусу*** деп аташат.

Бул аныктаманы пайдалануу менен $y=f(x)$ функциясынын туундусун табуунун төмөндөгүдөй ***алгоритми*** сунуш кылынат:

1. xтин мааниси бекемделет (б.а. аргумент xтин кандайдыр бир мааниси көрсөтүлөт) жана xтин ошол маанисиндеги $f(x)$ти табышат.

2. x аргументине $f(x)$ функциясынын аныкталуу областынан чыгып кетпегендей кылып Δx өсүндүсү берилет жана $f(x+\Delta x)$ тин мааниси эсептелинет.

3. Функциясынын $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ өсүндүсү эсептелинет.

4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ катышы эсептелинет.

5. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ катышынын $\Delta x \to 0$ умтулгандагы предели эсептелинет.

Мисалдар. 1. $y = x^2 - 3x$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Алгоритм боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

а) $f(x) = x^2 - 3x$;

б) $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x$;

в) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x) - (x^2 - 3x) =$
$= (2x-3)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3 + \Delta x)\Delta x$;

г) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2x - 3 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x - 3 + \Delta x$;

д) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3$.

Демек, $y' = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$.

2. $y = \cos x$ функциясынын $x = \frac{\pi}{6}$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Алдыдагы мисалга окшош эле төмөнкүгө ээ болобуз:

а) $f(x) = \cos x$;

б) $f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x)$;

в) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

г) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}};$$

д) $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta x}{x}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Эми бул туундунун $x = \frac{\pi}{6}$ чекитиндеги маанисин эсептейбиз, б.а.

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}5.$$

Ошентип, математиканын мектеп курсунда каралуучу *негизги элементардык (жөнөкөй) функциялар* төмөнкүдөй туундуларга ээ болушат:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2) $(\sin x)' = \cos x$; 3) $(\cos x)' = -\sin x$;

4) $(tqx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 5) $(ctqx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; 7) $(loq_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

Көнүгүүлөр.

78. Аныктаманы пайдаланып төмөндөгү функциялардын туундуларын тапкыла:

а) $y = 5x + 2$; б) $y = 3x - 1{,}6$; в) $y = 9 - \frac{3}{4}x$;

г) $y = -6x^2$; д) $y = \frac{1}{2}x^2$; ж) $y = 4x^2 + 7$;

з) $y = 1{,}5x^2 - 5x$; е) $y = 3x^2 + x - 8$

79. Төмөнкү функциялардын берилген чекиттеги туундусун эсептегиле.

а) $y = 7 - 4x, \quad x_0 = -4.2;$ б) $y = 1{,}6x^2 - 8, \quad x_0 = 5;$

в) $y = -x^2 + 5x, \quad x_0 = \frac{3}{4};$ г) $y = \sin x, \quad x_0 = \pi.$

4.3. Дифференцирлөө эрежелери.

Эми биз $u = u(x)$ жана $v = v(x)$ функцияларын карайлы жана алар дифференцирленүүчү функциялар болушсун дейли. Негизинен көпчүлүк учурда функциялардын туундуларын эсептеп чыгарууда төмөндөгү эрежелердин пайдаланыла тургандыгын эске салып кетели.

1-*теорема.* **Турактуу чоңдуктун туундусу нөлгө барабар, б.а.**

$$(C)' = 0 \quad \text{мында } C - const.$$

Далилдөө. Бул учурда $f(x) = C$ болгондуктан $f(x + \Delta x) = C.$ Анда

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0 \text{ жана } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \text{ болот.}$$

Демек, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$ б.а. $(C)' = 0$

Мисалы $y = -3$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Мында берилген (-3) саны турактуу чоңдук болгондуктан 1-теореманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз

$$y' = (-3)' = 0.$$

2-*теорема.* **Дифференцирленүүчү эки функциянын суммасынын туундусу, алардын туундуларынын суммасына барабар, б.а.**

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Далилдөө. Мейли $y = u(x) + v(x)$ болсун дейли. x аргументинин кандайдыр бир маанисин алып, ага берилген функциянын аныкталуу областынан чыгып кетпегендей Δx өсүндүсүн берели. Анда $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары дагы тиешелүү түрдө Δu жана Δv өсүндүлөрүнө ээ болушат, б.а. $u + \Delta u = u(x + \Delta x)$, $v + \Delta v = v(x + \Delta x)$. Ошондой эле $y = u + v$ суммасы да Δy өсүндүсүн алат:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) = (u + v) + (\Delta u + \Delta v).$$

Мындан $y = u + v$ болгондуктан $\Delta y = \Delta u + \Delta v$ болот. Мунун эки жагын Δx ке бөлүп жана $\Delta x \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Анда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ жана } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

болгондуктан $y' = u' + v'$, б.а. $(u+v)' = u' + v'$. Т.к.д.

Мисалы $y = x^5 - \sin x$ функциясынын туундусун табалы.

Чыгаруу. Мында берилген функция $u = x^5$, $v = \sin x$ функцияларынын алгебралык суммасына барабар экендигин жана 67-беттеги жөнөкөй функциялардын туундусу жөнүндөгү маалыматтарды эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y' = (x^5 - \sin x)' = (x^5)' - (\sin x)' = 5x^4 - \cos x.$$

3-*теорема.* **Дифференцирленүүчү эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу төмөндөгү формула менен эсептелет:**

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Далилдөө. Айталы $y = u(x) \cdot v(x)$ функциясы берилсин дейли. x аргументине өсүндү бергенде, тиешелүү түрдө $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары да өсүндү алышат, б.а.

$$u + \Delta u = u(x + \Delta x), \quad v + \Delta v = v(x + \Delta x).$$

Анда $y = u \cdot v$ - көбөйтүндүсү төмөнкүдөй өсүндүгө ээ болот:

$$\Delta y = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv, \text{ б.а.}$$

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Эми бул барабардыктын эки жагын Δx ке бөлүп жана $\Delta x \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Мында $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$. Ал эми $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, себеби бул 65-беттеги теорема боюнча дифференцирленүүчү $u(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнөн келип чыгат.

Демек

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot v', \text{ б.а. } y' = u' \cdot v + u \cdot v'. \text{ Т.к.д.}$$

Натыйжа. *Туруктуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга болот.*

$$(Cu)' = Cu', \text{ мында } C - const.$$

Мисалы $f(x)=e^x(4-5x^2)$ функциясы үчүн $f'(-2)$ ни тапкыла.

Чыгаруу. Мында эгерде $u(x)=e^x$ жана $u(x)=4-5x^2$ деп алсак, анда 1,2,3-теореманын жана натыйжанын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(x)=(e^x)'\cdot(4-5x^2)+e^x\cdot(4-5x^2)'=e^x(4-5x^2)+e^x(0-5\cdot 2x)=$$
$$=e^x(4-5x^2)-10xe^x=e^x(4-10x-5x^2).$$

Бул учурда берилген функциянын туундусунун (-2) чекитиндеги мааниси

$$f'(-2)=e^{-2}(4-10\cdot(-2)-5\cdot(-2)^2)=4e^{-2} \text{ болот.}$$

4-*теорема.* Дифференцирленүүчү эки функциянын тийиндисинин туундусу төмөндөгү формула менен эсептелет:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}, \quad v\neq 0.$$

Далилдөө. $v=v(x)\neq 0$ болгондуктан, алгач биз $y=\frac{1}{v}$ функциясынын туундусу эмнеге барабар экендигин аныктап алалы. Ал үчүн төмөнкүлөрдү аткаралы:

$$\Delta y=\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}=-\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}=-\frac{\Delta v}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

Мунун эки жагын Δx ке бөлсөк, анда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

Бул барабардыктын $\Delta x\to 0$ умтулгандагы пределин табууда $v(x)$ функциясынын дифференцирленүүчү болушунан анын үзгүлтүксүздүгү, б.а. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$ келип чыгаарын жана $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x)$ экендигин эске алсак, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-v'\cdot\frac{1}{v^2}, \text{ тактап айтканда } \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

Эми $\frac{u}{v}=u\cdot\frac{1}{v}$ болгондуктан көбөйтүндүнүн туундусу жөнүндөгү теореманы пайдалансак, анда

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{u'}{v}-\frac{u\cdot v'}{v^2}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}. \text{ Т.к.д.}$$

Мисалы, $y=\frac{2x^2}{1-7x}$ функциясынын туундусун таап көрөлү.

Чыгаруу. Мында $u = 2x^2$ жана $v = 1 - 7x$ болгондуктан 4-теореманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y' = \frac{(2x^2)' \cdot (1-7x) - 2x^2 \cdot (1-7x)'}{(1-7x)^2} = \frac{4x(1-7x) - 2x^2(0-7)}{(1-7x)^2} =$$

$$= \frac{4x - 28x^2 + 14x^2}{(1-7x)^2} = \frac{4x - 14x^2}{(1-7x)^2}.$$

Ал эми $f(x) = g(q(x))$, б. а. $f(x) = g(u)$ жана $u = q(x)$ көрүнүшүндөгү ***татаал функциянын туундусу*** төмөндөгү формула менен табылат:

$$f'(x) = g'(u) \cdot u' = g'(q(x)) \cdot q'(x). \qquad (1)$$

Мисалдар. 1. $y = \sqrt{12 - 3x^2}$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. Мында $y = u^{\frac{1}{2}}$ жана $u = 12 - 3x^2$ болгондуктан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (12 - 3x^2)', \text{ мында } \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad (12 - 3x^2)' = -6x$$

болгондуктан, жыйынтыкта

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-6x) = -\frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$$

экендиги келип чыгат.

2. Эгерде $f(x) = \ln(\cos^2 4x)$ болсо $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ны тапкыла.

Чыгаруу. Мында $f(x)$ функциясы төрт функциянын композициясынан турган татаал функция, б.а.

$$t = 4x, \quad v = \cos t, \quad u = v^2, \quad f = \ln u$$

болгондуктан анын туундусу

$$f'(x) = f'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x$$

формуласы боюнча төмөнкүчө табылат:

$$f'(x) = (\ln(\cos^2 4x))' \cdot (\cos^2 4x)' \cdot (\cos 4x)' \cdot (4x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 2\cos 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = -8 \cdot \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = -8tg\, 4x.$$

Эми берилген функциянын туундусунун көрсөтүлгөн чекиттеги маанисин эсептесек, анда

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8 \cdot tg\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -8 \cdot tg\frac{2\pi}{3} = -8 \cdot (-\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}.$$

Эскертүү. Бул мисалды башка ыкма менен чыгарса да болот, б.а. берилген функция үчүн алгач логарифманын касиетин пайдалансак, анда анын туундусун эсептөө бир кыйла жеңил болмок(ал ыкма менен эсептөөнү силер өзүңөр жүргүзүп көргүлө).

Эми биз мурдатан белгилүү болгон берилген функциянын тескери функциясы жөнүндөгү түшүнүктү эске алуу менен тескери функциялардын да туундуларын табуу маселесине токтололу.

Эгерде $y=f(x)$ - кандайдыр бир аралыкта дифференцирленүүчү функция (аргументи- x болгон) болсун десек, анда ал функцияга тескери функция (аргументи - y болгон) - $x=\varphi(y)$ болуп эсептелет. Мындай болгондо $y=f(x)$ фукциясынын туундусу $y_x'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ экендигин билүү менен ага тескери болгон $x=\varphi(y)$ функциясы жашайт жана ал тиешелүү аралыкта үзгүлтүксүз болот десек, анда $x_y'=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ туундусун табууга төмөндөгү теорема жардам берет.

5-теорема. **Туундусу нөлгө барабар болбогон дифференцирленүүчү функциянын тескери функциясынын туундусу, берилген функциянын туундусунун тескери чоңдугуна барабар, б.а.**

$$x_y'=\frac{1}{y_x'},\quad y_x'\neq 0. \tag{2}$$

Далилдөө. Айталы $y=f(x)$ функциясы дифференцирленүүчү жана $y_x'=f'(x)\neq 0$ дейли.

Мейли $x=\varphi(y)$ тескери функциясы үчүн көз каранды эмес өзгөрүлмө чоңдук y тин өсүндүсү - $\Delta y\neq 0$ жана функциянын өсүндүсү Δx болсун. Каралып жаткан шартта $\Delta y\neq 0$ болушунан $\Delta x\neq 0$ болоорун жеңил эле байкайбыз. Анда бул теңдештикти жазууга болот:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Бул барабардыктын $\Delta y\to 0$ умтулгандагы пределине өтсөк жана тескери функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн $\Delta x\to 0$ умтулаарын эске алсак төмөнкүгө ээ болобуз

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=1:\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Анда $x_y'=\dfrac{1}{y_x'}$ экендиги келип чыгат, мында x_y'- тескери функциянын туундусу. Талап кылынган далилденди.

Эми биз айтылган теореманын негизинде төмөндөгүлөрдүн туура экендигин далилдейли:

а) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; г) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Далилдөө. а) Мейли берилген функция $y = \arcsin x$ болсун десек, мында $-1 \le x \le 1$ жана $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ болот. Анда берилген функциянын тескери функциясы $x = \sin y$ көрүнүшүнө келет жана эгерде $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ болгондо $x_y' = \cos y \ne 0$ шарты аткарылат. Бул учурда алдыңкы теореманын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\cos y}. \qquad (3)$$

Ал эми $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ болгондо $\cos y > 0$ экендигин жана тригонометриялык

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \sin(\arcsin m) = m$$

теңдештиктерин эске алуу менен муну алабыз

$$\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0, \quad -1 < x < 1.$$

Ошентип, (3) барабардыктын негизинде төмөндөгү келип чыгат, б.а.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (4)$$

б) Эгерде берилген функция $y = \arccos x$ десек, анда анын тескери функциясы $x = \cos y$ жана $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$ болот.

(2)нин негизинде төмөнкүгө ээ болобуз

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = -\frac{1}{\sin y}. \qquad (5)$$

Мында $0 < y < \pi$ учурунда $\sin y > 0$ болот, анда

$$\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0 \quad (-1 < x < 1) \text{ болот.}$$

Бул учурда (5)нин негизинде

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (6)$$

Эскертүү. Эгерде $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ катышын жана сумманын туундусун эске алсак, анда (4)дөн (6)ны же тескерисинче (6)дан (4)нү оңой эле келтирип чыгарууга болот.

в) Айталы $y = arctg\, x$ $\left(x \in \left]-\infty, +\infty\right[,\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ болсун дейли, анда $x = tg\, y$ болот. Бул учурда дагы 5-теореманын негизинде

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ошентип,

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (7)$$

экендиги келип чыгат.

г) Эгерде берилген функция $y = arcctg x \left(x \in \left]-\infty, +\infty\right[;\ 0 < y < \pi\right)$ деп алсак, анда анын тескери функциясы $x = ctg\, y$. Бул учурда

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \text{б.а.}$$

$$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (8)$$

Талап кылынган далилденди.

Мисалдар. 1. $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x}$ болсо, анда $f'(5)$ ти тапкыла.

Чыгаруу. Эгерде (1)ни жана (4)нү эске алсак, анда төмөнкүгө ээ болобуз

$$f'(x) = \left(\arcsin\frac{x-1}{x}\right)' \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-x^2+2x-1}} \cdot \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}.$$

Анда $f'(5) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\cdot 5-1}} = \dfrac{1}{15}$ болот.

2. $y = arctg\, e^{2x} + \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$ функциясынын туундусун тапкыла.

Чыгаруу. (1)ни, (7)ни жана 2-теореманы пайдаланып төмөнкүгө ээ болобуз

$$y' = \left(arctg\, e^{2x}\right)'\left(e^{2x}\right)'(2x)' + \left(\ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}\right)'\left(\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}\right)'\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)' =$$

$$= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\cdot\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}+1)2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{2e^{4x}-2e^{2x}-2e^{4x}-2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{2e^{2x}}{1-e^{4x}} = \frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}.$$

Ошентип, $y' = \dfrac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$ болот.

Көнүгүүлөр.

80. Берилген функциялардын туундусун тапкыла.

а) $y = 5x - 4\frac{4}{7}$; б) $y = 9 - 5\frac{1}{2}x$;

в) $y = 6x + 2x^2$; г) $y = 1 - 3x + 5{,}5x^2$;

д) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{5}$; е) $y = 4x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 2{,}7$;

81. Теңдештикти далилдегиле.

а) эгерде $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$ болсо, $f'(1) + f'(-1) = -4f(0)$;

б) эгерде $f(x) = 3e^x$ болсо, $f'(x) + \frac{1}{3}f'(0) - f(x) = 1$;

в) эгерде $f(x) = \ln x$ болсо, $f'(x) + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0$;

г) эгерде $f(x) = \cos x$, $2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = f'(0) - f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

82. Төмөнкү функциялардын туундусун тапкыла.

а) $y = t^2(3-t^2)$; б) $y = 4t^3(5t^2-1)$;

в) $y = x^2\sin x$; г) $y = \sqrt{x}\cos x$;

д) $y = \frac{-2z}{7-4z}$; е) $y = \frac{5z-2}{5+3z}$;

ж) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$; з) $y = \frac{2x}{x^2+2}$.

83. Берилген функциялардын туундусун тапкыла.

а) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; б) $f(x) = 3\sqrt[3]{1-x}$;

в) $f(x) = 2\sin\frac{x}{5} + 3\cos 6x$; г) $f(x) = 3x\sin x + 2x\cos 3x$;

д) $f(x) = 5^{-2x} - x^4$; е) $f(x) = 3\cdot 7^{3x} + 2x^2$;

ж) $f(x) = \log_2 \cos 4x$; з) $f(x) = \ln\sin\frac{x}{4}$;

и) $f(x) = 3x\ln(5x)$; к) $f(x) = e^{\cos x}\sin x$.

84. Төмөнкү функциялардын туундусун тапкыла.

а) $y = \arccos 3x$; б) $y = 4\arcsin\frac{x}{2}$;

в) $y = -\frac{1}{2}arctg 4x$; г) $y = arcctg(2-x)$;

д) $y = \arccos(1-2x)$; е) $y = \arcsin\sqrt{x}$;

ж) $y = arcctg\frac{1+z}{1-z}$; з) $y = z - arctgz$;

и) $y = t\arccos t - \sqrt{1-t^2}$. к) $y = \sqrt{4t-t^2} + 4\arcsin\frac{\sqrt{t}}{2}$.

85. Функциянын көрсөтүлгөн чекиттеги туундусун эсептегиле.

а) $f(x) = e^{x/2}\cos\frac{x}{2}$, $x = 0$;

б) $f(x) = \ln(1+\sec x)$, $x = \frac{\pi}{3}$;

в) $f(t) = arcctgt - \frac{1}{t}$, $t = 1$;

г) $f(z) = (z+1)arctg\, e^{-2z}$, $z = 0$;

д) $f(z) = arctg\frac{z}{a} - \ln\sqrt[4]{z^4 - a^4}$, $z = 2a$.

Жооптор

1.б,г,д,з - жалпы ырастоолор. 3. б,в,д - калп. 5. Болбойт. 6. Мүмкүн эмес. 15. Көрсөтмө: $k(k+1)$ - туюнтмасы k нын каалаган натуралдык маанисинде 2ге эселүү сан. 21. Көрсөтмө: $4^{k+1} > 4k^2$, ал эми $k^2 \geq k$, $k \geq 1$ болгондуктан $4k^2 = k^2 + k^2 + k^2 + k^2 \geq k^2 + k + k + 1 = (k+1)^2$, б.а. акырында $4^{k+1} > (k+1)^2$ 22. Көрсөтмө. $A(k)$: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$ болсо $A(k+1)$: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$ экендигин далилдөө керек. Анын үчүн $A(k+1)$ ни $A(k)$ нын негизинде мынтип өзгөртөбүз $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{13}{24} - \frac{1}{2(k+1)}$. Мында $k > 1$ болгондуктан $\frac{13}{24} - \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$. 25. б) $2n$; г) $(2n-1)^2$; е) $\frac{(-1)^n}{2^n}$; з) $\cos\frac{n\pi}{6}$. 26. б) $y_1 \leq y_n \leq y_{11}$. 27. а) $10, 15, 20, 25, 30, 35$, $x_n = 5(n+1)$. 30. а,г- өсөт; б,в,е - кемийт. 33. б) төмөн жагынан чектелген, в) эки жагынан тен чектелген, д) чектелбеген. 43. $\frac{1}{4}$, $n_0 = 18$. 44. 2,5; $n_0 = 100$. 47. $\frac{1}{2}$, $n_0 = 29$. 50. б) $n_0 \geq 3$; в) $n_0 \geq 2$. 51. г) $a < 0$. 52. в) жок; г) бар, мис.$[0;1,3]$. 55. г) 0,2; е) 1. 56. г) $2\frac{1}{3}$; е) 1,2; з) -1,5. 59. б,в,ж - жоюлбайт. 62. Жок. Анткени эгерде биз $f(x) + g(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп алсак анда $(f(x) + g(x)) - f(x)$, б.а үзгүлтүксүз функциялардын айырмасы үзгүлтүксүз болгондуктан $g(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болмок, бирок шарт боюнча $g(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүктүү. 65. б)-10; д)-0,5; з) $-\frac{3}{4}$; к) 3 67. б) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 1$; г) $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0,5$; е) $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$. 68. б) $x = 0$ - верт., $y = x$ - жантык асимп.; г) $x = 1$ - верт., $y = x + 1$- жантык асимп.; е) верт.асимптотасы - жок, $y = x$ - жантык асимп. 70. б) -3; г) 48; е) 0,5; з) $-\frac{1}{4\sqrt{2}}$ 71. б) e^4; в) $1/\sqrt{e^3}$. 72. б) e^2; г) $e^{-1/3}$; е) e^{-4}; з) $1/e^2$. 77. в) $(2x-3)\Delta x$; г) $(3x^2 - 2)\Delta x$. 83. б) $-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; в) $\frac{2}{5}\cos\frac{x}{5} - 18\sin 6x$; д) $-2(5^{-2x}\ln 5 + 2x^3)$; з) $0,25ctg\frac{x}{4}$; к) $e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$. 84. а) $-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $-\frac{2}{1+16x^2}$; г) $\frac{1}{x^2-4x+5}$; д) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; е) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; ж) $-\frac{1}{1+z^2}$; з) $\frac{z^2}{1+z^2}$; и) $\arccos t$; к) $\sqrt{\frac{4}{t} - 1}$. 85. а) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})$, $f'(0) = \frac{1}{2}$; б) $f'(x) = \frac{tgx}{1+\cos x}$, $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $f'(t) = \frac{1}{t^2 + t^4}$, $f'(1) = 0,5$, г) $f'(0) = \frac{\pi - 4}{4}$; д) $f'(2a) = -1/3a$.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Алгебра жана анализдин башталышы. Орто мектептин 9-классы үчүн окуу китеби /А.Н.Колмогоровдун ред. астында. -2-чыг. - Фрунзе: Мектеп, 1977, 234б.

2. Баврин И.И. Высшая математика. - М.: Просвещение, 1980, 384с.

3. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра жана элементардык функциялар. Орто мектептин 9 жана 10 класстары үчүн окуу китеби. I,II-бөлүм. - 10-чыг. - Фрунзе: Мектеп, 1975, 350б., 286б.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. -6-е изд. - М.: Наука, 1986, 576с.

5. Математический анализ и алгебра. /Составитель С.И. Шварцбурд. - М.: Просвещение, 1967, 347с.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -13-е изд. - М.: Наука, 1987, 352с.

7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для подгот.отд. вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 1987, 416с.

8. Пособие по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие /А.Д.Кутасов, Т.С.Пиголкина, В.И.Чехлов, Т.Я.Яковлева; Под ред. Г.Н.Яковлева. - М.: Наука, 1981, 607с.

9. Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов. Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1978, 272с.

10. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие /В.К.Егерев, Б.А.Кордемский, В.В.Зайцев и др.; Под ред. М.И.Сканави -6-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 1992, 528с.

11. Сборник конкурсных задач по математике: Учеб. пособие /В.М. Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин и др.; Под ред. А.И. Прилепко. - М.: Наука, 1983, 384с.

12. Шишкин А.А., Евсин В.И., Корнева Н.А. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для подгот. факультетов вузов. - М.: Высшая школа, 1984, 256с.

М А З М У Н У